

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

/ / / / / / / / / / / / /

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : «signal, image, parole, télécoms»

préparée au laboratoire des images et des signaux de Grenoble

dans le cadre de l'**École Doctorale**

«électronique, électrotechnique, automatique, télécommunications, signal»

présentée et soutenue publiquement

par

Pierre FABRY

le 24 septembre 2001

Titre :

**TECHNIQUES DE SÉPARATION DE SOURCES APPLIQUEES À
DES SIGNAUX VIBRATOIRES DE MACHINES TOURNANTES**

Directeur de thèse : Christine SERVIÈRE

JURY

Monsieur Miguel LAGUNAS	, Président et Rapporteur
Monsieur Pascal LARZABAL	, Rapporteur
Madame Christine SERVIÈRE	, Directeur de thèse
Monsieur Georges DELAUNAY	, Examineur
Monsieur Jean-Louis LACOUME	, Examineur
Monsieur Georges GOULLET	, Examineur

“Il semble que tout l’effort industriel de l’homme, tous ses calculs, toutes ses nuits de veille sur les épures, n’aboutissent comme signe visible, qu’à la seule simplicité, comme s’il fallait l’expérience de plusieurs générations pour dégager peu à peu la courbe d’une carène ou d’un fuselage d’avion, jusqu’à leur rendre la pureté élémentaire de la courbe d’un sein ou d’une épaule.”

Antoine de Saint Exupéry, *Terre des Hommes*

REMERCIEMENTS

Merci aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Merci au Professeur J.-L. Lacoume pour m'avoir accueilli au CEPHAG (depuis devenu LIS), pour ses cours fantastiques, pour sa production de mille idées à la minute (dont j'aurais dû user un peu plus) et pour ses nombreux conseils.

Merci à Christine Servière, Chargée de Recherche au CNRS, qui fût une merveilleuse directrice de thèse, tant pour son soutien scientifique que pour la chaleur humaine qui a accompagné ces quelques années de thèse. Puisse-t-elle un jour me pardonner d'avoir été si exécrationnel et têtue.

Merci à Steeve Zozor pour ses relectures, ses conseils, ses longs discours interminables, son assistance LaTeX, les courses à pied, les randonnées, le ski de fond, le saut à l'élastique ...

Merci à tous ceux grâce à qui le souvenir de la thèse restera synonyme de convivialité et bonne humeur : Marie-France Blanchetière, Martine et Jean-Marc Brossier, Christine Servière (encore et toujours), Marianne Nardin, Daniel Baudois, Eric Moisan, François Glangeaud, Abder Essebar, Steeve et Géraldine Zozor (encore et toujours), Alexandre Piot et Alexandra Mangel, J.-L. Mori et Sandrine BientôtMori, Xavier Dagany, Pierre Marchand, Mathieu Durnerin, Daniel Goncalvez et tous ceux que j'ai oublié. J'en profite pour mentionner quelques moments inoubliables :

- *les courses de chaises roulantes dans les couloirs du labo ;*
- *les pizzas, pâtes et autres raclettes clandestines certains soirs au labo ;*
- *les badigeonnages d'écrans avec un beau marqueur bleu outremer indélébile ;*
- *les tentatives de résolution du problème précédent à l'aide de divers solvants ;*
- *les séances de coiffure (merci à tous mes coiffeurs successifs) dans la kfet' du labo*

Merci à Pierre Marchand pour sa compagnie dans les nuits blanches au labo et sa créativité impressionnante, illustrée notamment par la *théorie des choses en trois points* :

- *le principe de la fondamentalité,*
- *la recette de la purée pour trois personnes,*
- *l'analyse des résultats.*

Merci à Philippe Graffoulière dit Graffou et à Pierre Marchand pour leur vrai faux poster au Grets 97.

Merci à Minh Quy Nguyen pour les pâtisseries de fin de journée ...

Merci à Momo Cherifi pour les sympathiques discussions à 5h00 du mat' au labo lorsque je finissais ma journée et qu'il commençait la sienne !

Merci à celui qui m'a évité de sombrer dans la Zubrowka ... car il l'aimait plus que moi !

Merci à mes parents, mes soeurs et mon frère qui m'ont soutenu sans défaillir.

Enfin Merci à celles qui m'ont agréablement accompagné (successivement et non simultanément, je précise) sur le chemin de la thèse ; avec une mention spéciale pour Esther B. et Caroline J.

Table des matières

Table des matières	iii
Liste des figures	xii
Notations	xii
Abréviations	xvi
Introduction	xix
I Outils et signaux	1
1 Modélisation des signaux	3
1.1 Introduction	3
1.2 Modèle des signaux vibratoires	4
1.3 Etude d'une sinusoïde à paramètre aléatoire	5
1.3.1 Stationnarité au sens strict	6
1.3.2 Ergodisme au sens large et au sens strict	7
1.4 Etude d'un couple de sinusoïdes à phase aléatoire	8
1.4.1 Stationnarité au sens strict	8
1.4.2 Ergodisme au sens strict	8
1.5 Conclusion	9
2 Problématique de la séparation de signaux	11
2.1 Introduction	11
2.2 Modèles de mélange	12
2.2.1 Modèle convolutif	12
2.2.2 Modèle instantané	13
2.2.3 Modèle spectral	14
2.2.4 Cas particulier du traitement d'antenne	17
2.3 Principe de la séparation de signaux	18
2.3.1 Idées générales	18
2.3.2 Séparation en absence de bruit	19

2.3.3	Séparation en présence de bruit	19
2.4	Les problèmes de séparation et leurs hypothèses	21
2.4.1	Vue d'ensemble sur les mélanges linéaires	21
2.4.2	La séparation aveugle de sources	22
2.4.3	La séparation de sources	22
2.4.4	L'Analyse en Composantes Indépendantes	23
2.4.5	Notre approche	23
2.5	Identifiabilité et séparabilité	23
2.5.1	Non identifiabilité intrinsèque	23
2.5.2	Non identifiabilité à l'ordre deux	24
2.5.3	Indéterminations du modèle convolutif	26
2.5.4	Indéterminations du modèle instantané	26
2.5.5	Indéterminations du modèle spectral	27
2.5.6	Conclusion	27
2.6	Mesure de l'acuité de la séparation	27
2.7	Conclusion	28
3	Panorama des techniques de séparation de signaux	29
3.1	Introduction	29
3.2	Les techniques orthogonales	30
3.2.1	Première étape : l'Analyse en Composantes Principales (ACP)	30
3.2.2	Seconde étape : Transformation Unitaire	30
3.3	L'Analyse en Composantes Principales et ses limites	31
3.3.1	Hypothèses classiques : bruits spatialement blancs	31
3.3.2	Blanchiment des observations par ACP	32
3.3.3	Cas de bruits spatialement corrélés	34
3.3.4	Conclusions sur l'ACP	34
3.4	Analyse en Composantes Indépendantes	35
3.4.1	Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle de variables aléatoires	35
3.4.2	Traitement du modèle instantané	35
3.4.3	Les mesures d'indépendance	36
3.5	Décorrélation à l'ordre 2	39
3.6	Traitement du modèle convolutif	40
3.7	Traitement des mélanges bruités	40
3.8	Traitement de signaux vibratoires	41
3.9	Conclusion	42

II	SEPARATEUR FREQUENTIEL A DECALAGES TEMPORELS	43
4	Spectres et Matrices spectrales décalés	47
4.1	Introduction	47
4.2	Définition des spectres décalés	47
4.3	Spectre décalé théorique d'une fréquence pure	48
4.4	Spectre décalé théorique d'une somme de fréquences pures	49
4.5	Estimation du spectre décalé par TFD	49
4.5.1	Etude de l'estimateur	49
4.5.2	Cas d'un bruit aléatoire à faible durée de corrélation	53
4.5.3	Cas d'un signal aléatoire bande étroite	54
4.5.4	Cas d'une fréquence pure	54
4.5.5	Cas d'une somme de fréquences pures	55
4.5.6	Conclusion sur l'estimateur	55
4.6	Matrices Spectrales Décalées	56
4.7	Conclusion	56
5	Séparation de signaux à spectres de raies, méthode à retards	57
5.1	Introduction	57
5.2	Position du problème (rappels)	59
5.3	Estimation du sous-espace signal	60
5.3.1	Calcul de la matrice spectrale non bruitée	60
5.3.2	Résultats de simulation	62
5.4	Transformation Orthogonale	66
5.5	Réduction de bruit	69
5.5.1	Projections sur les sous-espaces signal et bruit	69
5.5.2	Séparation de sources par maximisation du RSB des estimées	70
5.6	Résultats de simulation	75
5.7	Conclusion	78
6	Estimation du nombre de sources	79
6.1	Introduction	79
6.2	Formulation du problème	80
6.3	Méthodes classiques	82
6.3.1	Méthodes statistiques avec l'hypothèse de bruits blancs	82
6.3.2	Abandon de l'hypothèse de bruits blancs	83
6.3.3	Méthodes fondées sur la stabilité du sous-espace signal	84
6.3.4	Les méthodes proposées	85
6.4	Méthodes basées sur les Matrices Spectrales Décalées	86
6.4.1	DVS de la Matrice Spectrale Décalée	86
6.4.2	Critère heuristique par Traitement d'Images	90

6.4.3	Distance entre sous-espaces	95
6.5	Résultats de simulation	97
6.6	Conclusion	98
III APPLICATION A DES SIGNAUX EXPERIMENTAUX		101
7	Traitement de signaux réels	103
7.1	Introduction	103
7.2	Présentation de l'expérimentation	103
7.3	Analyse des signaux et étude des sources présentes	104
7.3.1	Allure temporelle des signaux	104
7.3.2	Etude des spectres	106
7.3.3	Etude des relations linéaires entre capteurs	108
7.3.4	Détection de non-linéarités quadratiques	114
7.3.5	Analyse haute résolution d'un canal fréquentiel	119
7.3.6	Etude de la corrélation temporelle du bruit	120
7.3.7	Validation expérimentale du modèle des sources de vibration	122
7.3.8	Conclusion sur les signaux	126
7.4	Estimation du nombre de sources et validation des résultats	126
7.5	Séparation des signaux dans un canal	128
7.5.1	Présentation des 4 cas d'étude	128
7.5.2	Blanchiment spatial	131
7.5.3	Séparation	136
7.6	Conclusion	146
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES		149
ANNEXES		153
A	Annexes du chapitre 1	155
A.1	Ergodisme au sens strict d'une sinusoïde à phase aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$	155
A.2	Ergodisme au sens strict d'un couple de sinusoïdes à phase aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$	157
B	Annexes du chapitre 2	159
B.1	TFD d'une convolution linéaire	159
B.2	Statistiques d'Ordre Supérieur	161
B.2.1	Fonctions caractéristiques	161
B.2.2	Définition des moments et cumulants	162

B.2.3	Relation entre moments et cumulants.	163
B.2.4	Multilinéarité	164
B.2.5	Moments et cumulants de variables aléatoires indépendantes	165
B.2.6	Cumulants des variables aléatoires gaussiennes	166
B.2.7	Invariance par translation	166
B.2.8	Moments et cumulants de variables aléatoires à valeurs complexes	166
B.2.9	Standardisation	167
B.2.10	Circularité	167
B.2.11	Logarithme népérien d'une variable complexe	168
C	Annexes du chapitre 4	169
C.1	Module du spectre décalé estimé en fonction de τ	169
C.1.1	Etude théorique	169
C.1.2	Simulations	170
C.2	Un estimateur du RSB pour les données expérimentales	173
C.3	Caractères non nécessairement hermitien et défini positif des Matrices Spectrales Décalées	174
D	Annexes du chapitre 5	175
D.1	Choix des paramètres du séparateur	175
D.1.1	Introduction	175
D.1.2	Critères utilisés	175
D.1.3	Algorithme utilisé	177
D.1.4	Remarque Importante	179
D.1.5	Contrôle des résultats	180
E	Annexes du chapitre 7	181
E.1	Zoom fréquentiel d'un canal de TFD	181
	Bibliographie	186

Table des figures

2.1	Antenne rectiligne de capteurs équidistants	18
2.2	principe de la séparation de sources	19
4.1	Calcul de la double somme	50
4.2	Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, $N = 64$ et $\tau = 0$	51
4.3	Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, $N = 64$ et $\tau = \frac{3}{4}N$	52
4.4	Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, $N = 64$ et $\tau = N$	52
4.5	Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes proches, $N = 64$ et $\tau = 0$	52
4.6	Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes proches, $N = 64$ et $\tau = \frac{3}{4}N$	53
4.7	Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes proches, $N = 64$ et $\tau = N$	53
5.1	Schéma du séparateur à décalages	58
5.2	Valeurs propres estimées par ACP et valeurs propres de \mathbf{R}_{yy}	63
5.3	Valeurs propres estimées par décalage et valeurs propres de \mathbf{R}_{yy}	63
5.4	Erreurs relatives	65
5.5	Distances entre sous-espaces	65
5.6	Taux de réjection	69
5.7	Enveloppe de la 1ère source	76
5.8	Enveloppe de la 2ème source	76
5.9	Enveloppe de la 3ème source	76
5.10	Enveloppe d'une observation bruitée	77
5.11	Enveloppe d'une source estimée bruitée	77
5.12	Enveloppe de la 1ère source estimée	77
5.13	Enveloppe de la 2ème source estimée	78
5.14	Enveloppe de la 3ème source estimée	78
6.1	Image de la matrice $ \mathbf{A} $	92
6.2	Effet des dérivées première et seconde sur un contour	93
6.3	Image \mathbf{B} obtenue par filtrage Laplacien de $ \mathbf{A} $	93
6.4	Image \mathbf{C} où l'on n'a conservé que les valeurs positives de \mathbf{B}	94
6.5	Image \mathbf{D} résultant du filtrage de Sobel de \mathbf{C}	95
6.6	probabilité de succès : bruits blancs gausiens	98
6.7	probabilité de succès : bruits colorés	98

7.1	Schéma du banc d'essai	104
7.2	dsp des signaux accélérométriques de l'ensemble 1 (N=4096)	106
7.3	dsp des signaux électriques de l'ensemble 1 (N=4096)	106
7.4	dsp des signaux accélérométriques de l'ensemble 2 (N=4096)	107
7.5	dsp des signaux électriques de l'ensemble 2 (N=4096)	107
7.6	dsp des signaux accélérométriques du socle (N=4096)	108
7.7	dsp et cohérences de deux couples d'accéléromètres (résolution 1/4096)	109
7.8	dsp et cohérences de deux couples d'accéléromètres (résolution 1/8192)	110
7.9	dsp et cohérences des alternateurs (résolution 1/4096)	111
7.10	dsp et cohérences des alternateurs et des alimentations électriques (résolution 1/4096)	111
7.11	dsp et cohérences de signaux électriques et accélérométriques (résolution 1/4096)	112
7.12	dsp et cohérences des signaux électriques des alternateurs et d'un signal accélérométrique (résolution 1/4096)	113
7.13	dsp et cohérences d'une alimentation et de signaux accélérométriques (résolution 1/4096)	114
7.14	autobicohérence du signal ampèremétrique A1	115
7.15	autobicohérence du signal ampèremétrique B1	115
7.16	interbicohérence des signaux ampèremétriques A1 et B1	116
7.17	interbicohérence entre le signal électrique A1 et accélérométrique L1	117
7.18	interbicohérence entre le signal électrique A1 et accélérométrique L2	117
7.19	interbicohérence entre le signal électrique B1 et accélérométrique T1	118
7.20	autobicohérence du signal accélérométrique L1	118
7.21	interbicohérence entre les signaux accélérométriques L1 et R1	119
7.22	zoom fréquentiel de $x(t)$ d'un facteur L autour de la fréquence centrale f/N	120
7.23	zoom fréquentiel de facteur 2	121
7.24	zoom fréquentiel de facteur 32	121
7.25	zoom spectral du capteur R1 au canal 229 (résolution 1/4096)	121
7.26	module du spectre décalé du signal R1 au canal 229	122
7.27	dsp du signal L2 filtré par TFD au canal 213 (zoom fréquentiel)	123
7.28	module du signal L2 filtré par TFD au canal 213	124
7.29	phase des matrices $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}(f)$ et $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f)$ du signal L2 filtré par TFD au canal 213	124
7.30	dsp du signal R1 filtré par TFD au canal 208 (zoom fréquentiel)	124
7.31	position des maxima dans le spectrogramme du signal R1 filtré par TFD au canal 208	125
7.32	module du signal R1 filtré par TFD au canal 208	126
7.33	phase des matrices $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}(f)$ et $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f)$ du signal R1 filtré par TFD au canal 208	126
7.34	nombre de source estimé au canal 213 en fonction du retard τ	128
7.35	nombre de sources estimé dans les canaux 200 à 220 pour $\tau = 150 \cdot 32$	128
7.36	dsp des 14 capteurs au canal 213 (zoom fréquentiel)	129

7.37	cohérence entre les 14 capteurs au canal 213	129
7.38	cas 1 : dsp des 3 capteurs au canal 213 (zoom fréquentiel)	130
7.39	cas 2 : dsp des 6 capteurs au canal 213 (zoom fréquentiel)	130
7.40	cas 1 : valeurs propres de la matrice spectrale décalée	131
7.41	cas 2 : valeurs propres de la matrice spectrale décalée	132
7.42	cas 1 : valeurs propres de la matrice de blanchiment	132
7.43	cas 2 : valeurs propres de la matrice de blanchiment	132
7.44	cas 3 : valeurs propres de la matrice spectrale décalée	133
7.45	cas 3 en retirant A1 et A2 : valeurs propres de la matrice spectrale décalée . .	133
7.46	cas 2 : kurtosis spectral des deux sources estimées	134
7.47	cas 3 : kurtosis spectral des trois sources estimées	134
7.48	cas 2 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par ACP	135
7.49	cas 2 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par décalage	135
7.50	cas 3 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par ACP	136
7.51	cas 3 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par méthode à décalages	136
7.52	cas 4 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par ACP	136
7.53	cas 4 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par méthode à décalages	137
7.54	cas 2 : zoom fréquentiel des signaux séparés par l'ACP suivie de JADE	137
7.55	cas 2 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 1	137
7.56	cas 2 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 2	138
7.57	cas 3 : zoom fréquentiel des signaux séparés par l'ACP suivie de JADE	138
7.58	cas 4 : zoom fréquentiel des signaux séparés par l'ACP suivie de JADE	139
7.59	cas 3 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 1	139
7.60	cas 4 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 1	139
7.61	cas 3 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 2	140
7.62	cas 4 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 2	140
7.63	capteur A1	141
7.64	capteur B1	141
7.65	capteur L1	141
7.66	capteur M1	142
7.67	capteur P1	142
7.68	capteur R1	142
7.69	capteur A2	143
7.70	capteur B2	143
7.71	capteur L2	143
7.72	capteur M2	144
7.73	capteur R2	144
7.74	capteur S4	144
7.75	capteur S5	145
7.76	capteur T1	145

7.77	Cohérence entre les sources estimées et les capteurs	146
C.1	Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, RSB imposé -10 dB.	171
C.2	Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, RSB imposé 0 dB.	171
C.3	Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, RSB imposé 10 dB.	171
C.4	Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes, RSB imposé -10 dB.	172
C.5	Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes, RSB imposé 0 dB.	172
C.6	Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes, RSB imposé 10 dB.	172
C.7	Un bruit non blanc uniforme, aucune source.	173
E.1	d.s.p. de $X(f, \tau)$ à la résolution $1/NT_e$	181
E.2	Spectre du signal démodulé sous-échantillonné	182
E.3	Durée d'intégration associée au zoom spectral	185

Notations

Fonctions et opérateurs

$\delta(x)$	Impulsion de Dirac si la variable x est continue ; Impulsion unité sinon
δ_{ik}	Symbole de Kronecker ($\delta_{ik} = 1$ pour $i = k$ et 0 sinon)
$\text{sinc}(x)$	sinus cardinal défini par $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
$\text{sinp}(x, N)$	fonction définie par $\frac{\sin(\pi N x)}{\sin(\pi x)}$
$\text{tr}(\cdot)$	trace de la matrice (\cdot)
$E[\cdot]$	espérance mathématique
$\text{Pr}[\cdot]$	probabilité d'un événement
$\overline{(\cdot)}$	moyenne temporelle (sur un intervalle de temps à préciser)
$\widetilde{(\cdot)}$	signal complexe bande limitée (\cdot) ramené en bande de base
$\widehat{(\cdot)}$	estimée
$ \cdot $	valeur absolue pour les scalaires réels, module pour les scalaires complexes
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire hermitien
$\ \cdot\ $	norme matricielle
$d(\cdot, \cdot)$	distance
$(\cdot) * (\cdot)$	produit de convolution linéaire à temps discret
$(\cdot) \otimes (\cdot)$	produit de convolution circulaire à temps discret
$(\cdot)^T$	transposition
$(\cdot)^*$	conjugaison
$(\cdot)^+$	transposition conjugaison
$(\cdot)^\#$	pseudo-inverse d'une matrice rectangulaire
\wedge	produit vectoriel

Ensembles et espaces

\mathbb{C}	Ensemble des complexes
\mathbb{N}	Ensemble des entiers positifs
\mathbb{R}	Ensemble des réels
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers relatifs
\mathcal{E}_b	Sous-espace bruit
\mathcal{E}_{obs}	Espace vectoriel des observations
\mathcal{E}_s	Sous-espace signal
\mathcal{E}_s^\perp	Sous-espace orthogonal à \mathcal{E}_s

Grandeurs scalaires

f	indice du canal fréquentiel discret $\frac{f}{N}F_e$
j	nombre complexe désignant la racine carrée de -1
t	indice temporel de la date tT_e
z	variable complexe de la TZ
θ	coefficient de pondération de la TFD
β	coefficient de pondération de la TFDI lié à θ par $N\beta\theta = 1$
ν	variable des fréquences réduites
τ	retard
F_e	fréquence d'échantillonnage
T_e	période d'échantillonnage
L	pas de glissement pour la TFD (en nombre d'échantillons)
M	nombre de tranches glissantes pour la TFD
N	taille des tranches temporelles pour la TFD (en nombre d'échantillons)
n_b	nombre de bruits temporels indépendants
n_s	nombre de sources temporelles indépendantes
n	nombre de capteurs ou d'observations
c	nombre de composantes-sources indépendantes au canal fréquentiel f

Signaux et grandeurs vectorielles

$\mathbf{x}(t)$	vecteur de signaux temporels à l'instant t
$x_i(t)$	i ème composante du vecteur $\mathbf{x}(t)$
$C_{x_i x_i}(\tau)$	fonction d'autocorrélation de $x_i(t)$
$\mathbf{x}^t(f)$ ou \mathbf{x}^t	vecteur de TFD de $\mathbf{x}(t)$ sur le bloc temporel $[t, \dots, t + N - 1]$
$x_i^t(f)$ ou x_i^t	i ème composante du vecteur \mathbf{x}^t
$R_{x_i x_i}(f)$ ou $R_{x_i x_i}$	densité spectrale de puissance de $x_i(t)$

Grandeurs matricielles

\mathbf{I}_n	matrice identité de rang n
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$	matrice carrée diagonale portant les termes diagonaux (a_1, \dots, a_n)
$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}(f)$ ou $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$	matrice spectrale (signaux centrés) au canal f : $\text{E} \left[\mathbf{x}^t (\mathbf{x}^t)^+ \right]$
$\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}(f)$ ou $\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}$	matrice interspectrale au canal f : $\text{E} \left[\mathbf{x}^t (\mathbf{y}^t)^+ \right]$
$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^\tau(f)$ ou $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^\tau$	matrice spectrale décalée au canal f et au retard τ : $\text{E} \left[\mathbf{x}^t (\mathbf{x}^{t+\tau})^+ \right]$
$\mathbf{C}_{\mathbf{xx}}(\tau)$	matrice de corrélation du vecteur $\mathbf{x}(t)$ au retard τ
$\mathbf{C}_{\mathbf{xx}}(0)$ ou $\mathbf{C}_{\mathbf{xx}}$	matrice de covariance du vecteur $\mathbf{x}(t)$

Grandeurs tensorielles

$\kappa_z \binom{q}{p}$	le Cumulant de la variable z , défini par $\text{Cum} \left[\underbrace{z, \dots, z}_p, \underbrace{z^*, \dots, z^*}_q \right]$
$\kappa_{\mathbf{z}} \binom{q}{p}$	les Cumulants du vecteur complexe \mathbf{z} , définis par $\text{Cum} \left[z_{i_1}, \dots, z_{i_p}, z_{k_1}^*, \dots, z_{k_q}^* \right]$
$K_x(t)$	Kurtosis temporel du signal $x(t)$
$K_X(f)$	Kurtosis fréquentiel du signal $x(t)$ obtenu par TFD au canal f

Abréviations utilisées

Nous donnons entre parenthèses l'abréviation anglaise

ACI	Analyse en Composantes Indépendantes (ICA)
ACP	Analyse en Composantes Principales (PCA)
AR n	filtre purement récuratif ou Auto-Régressif d'ordre n (AR n)
DVS	Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)
DVP	Décomposition en Valeurs Propres (EVD)
EMV	Estimateur du Maximum de Vraisemblance (MLE)
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique
FAS	Filtre Adapté Spatial (SMF)
FLH	Filtre Linéaire et Homogène
JADE	Joint Approximate Diagonalization of Eigen-Matrices
MA n	filtre transverse ou à Moyenne Ajustée à n coefficients (MA n)
MUSIC	MUltiple SIgnal Characterization
MV	Maximum de Vraisemblance (ML)
RADAR	RAdio Detection And Ranging
RIF	filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (FIR)
RII	filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (IIR)
RSB	Rapport Signal à Bruit (SNR)
RSBI	Rapport Signal à Bruit plus Interférences (SINR)
SAS	Séparation Aveugle de Sources (BSS)
SES	Sous-Espace Signal (SSS)
SLIT	Système Linéaire et Invariant dans le Temps (TILS)
SOBI	Second Order Blind Identification
SONAR	SOund NAVigation And Ranging
SOS	Statistiques d'Ordre Supérieur à deux (HOS)
TFD	Transformée de Fourier Discrète (DFT)
TFDI	Transformée de Fourier Discrète Inverse (IDFT)
TFR	Transformée en Fréquence Réduite
TFRI	Transformée en Fréquence Réduite Inverse
TZ	Transformée en Z
VACC	Variables Aléatoires Circulaires Complexes

ABBREVIATIONS

ddp	densité de probabilité (pdf)
dsp	densité spectrale de puissance (psd)
dspi	densité spectrale de puissance (cpsd)
iid	indépendant et identiquement distribué (iid)
ssi	si et seulement si
v.a.	variable aléatoire

Introduction

Le problème général de la séparation de signaux peut se formuler ainsi : *« retrouver des signaux utiles qui ont été mélangés et bruités, sans connaître le processus de mélange et avec un minimum de connaissances a priori »*. Les signaux utiles sont souvent dénommés *sources*. Ce terme provient de la physique où il désigne des *excitations ponctuelles* qui émettent des ondes dans un *milieu* de propagation. Les ondes sont reçues en un ensemble de points répartis dans l'espace. On peut alors définir la séparation de signaux comme une opération de filtrage spatio-temporel.

Ce problème se rencontre en astronomie lorsqu'un radiotélescope observe simultanément plusieurs étoiles dont on veut séparer les contributions, en communication ainsi qu'en radar et sonar lorsque des signaux provenant de plusieurs émetteurs ou réflecteurs interfèrent au niveau de l'antenne du récepteur, en prospection sismique, en imagerie médicale et dans bien d'autres domaines. L'exemple le plus courant est celui de l'environnement "cocktail-party" où plusieurs locuteurs s'expriment simultanément. Le système auditif humain réalise une opération de séparation de signaux puisqu'il est capable de rehausser l'un des signaux. Certaines techniques de séparation de signaux sont capables de réaliser une opération similaire à partir d'enregistrements délivrés par des microphones. D'une manière générale les techniques de séparation de signaux utilisent les signaux de mélange observés sur un réseau de capteurs.

Les techniques actuelles supposent que le mélange est linéaire et homogène. On distingue le modèle instantané qui est une simple sommation des signaux pondérés, du modèle convolutif qui est une sommation des filtrées linéaires et homogènes des sources. Lorsque la forme du front d'onde et la géométrie du réseau de capteurs sont connues, il est possible d'utiliser des techniques particulières dites de traitement d'antenne. Ces techniques sont malheureusement sensibles aux erreurs de modèle. Lorsque celles-ci sont importantes ou que la géométrie du réseau de capteurs est inconnue, les techniques de traitement d'antenne ne peuvent plus s'appliquer. Il en est de même lorsque les sources sont proches des récepteurs ou que le phénomène de multi-trajets est important (*téléphonie mobile, phénomènes vibratoires en mécanique...*) car le modèle de propagation est alors trop complexe. Le manque de connaissances sur le modèle de mélange est compensé soit par l'emploi de statistiques d'ordre supérieur lorsque les sources ne sont pas gaussiennes, soit par des connaissances sur les sources (densités de probabilité, hypothèses sur les fonctions de corrélation, connaissance des modulations en communication, signaux à module constant...).

L'application qui nous intéresse est celle où un ensemble de machines tournantes émet des

vibrations qui se mélangent au niveau d'un réseau de capteurs disposés sur le bâti. Séparer les différentes contributions doit permettre de localiser les défauts, déterminer le niveau d'usure ou encore améliorer la discrétion acoustique. En première approximation les signaux émis sont des sommes de fréquences pures de composantes proches et ils ont une forte dynamique spectrale. Ceci pose une première difficulté puisque le séparateur ne doit pas être "aveuglé" par les bandes fréquentielles les plus énergétiques. Une seconde difficulté est que le nombre de sources est inconnu puisqu'il dépend des défauts inconnus des machines. Par ailleurs les vibrations de certaines parties (châssis métalliques, grilles de protection...) et les flux d'air au sein des machines sont très erratiques et perturbent l'interprétation des enregistrements. Ils sont considérés comme des bruits rayonnés. Ceci implique une difficulté supplémentaire : le modèle doit prendre en compte la présence de bruits spatialement corrélés. Une telle hypothèse a déjà été considérée en traitement d'antenne [BTGJ97] [Mar98] mais jamais en séparation aveugle de sources.

En faisant un tour d'horizon des techniques de séparation de signaux nous constaterons qu'aucune ne traite le cas du mélange convolutif d'un nombre inconnu de sources en présence de bruits spatialement corrélés. La plupart des méthodes traite le problème des mélanges instantanés non bruités. Dans ce cas le nombre de sources (connaissance indispensable pour les méthodes aveugles) est directement le rang de la matrice de covariance des observations. Les méthodes qui envisagent la présence de bruits supposent souvent que le nombre de sources est connu. Lorsqu'il est inconnu elles considèrent que les bruits sont spatialement blancs (bruits indépendants et de même puissance) de façon à estimer la dimension du modèle par des techniques non paramétriques.

Nous proposons de réaliser les traitements dans le domaine fréquentiel. Le modèle convolutif est remplacé par le modèle spectral qui est une série de modèles instantanés fréquentiels. Les traitements étant réalisés dans chaque canal de fréquence la méthode est peu tributaire de la dynamique spectrale, contrairement aux méthodes large bande. En contrepartie ce modèle impose des traitements supplémentaires (Transformation de Fourier Discrète, estimation des permutations entre canaux) et un coût de calcul élevé (une séparation par canal de mélange). Le schéma de traitement dans chaque canal peut se résumer ainsi :

- estimation fiable du nombre de composantes-source en présence de bruits spatialement corrélés,
- séparation des composantes en maximisant le rapport signal à bruit (sur chaque sortie une seule source est considérée comme un signal utile),
- estimation de l'amplitude de chaque composante vue sur un capteur (extraction).

Compte tenu des indéterminations sur l'ordre des signaux séparés dans chaque canal de fréquence, un post-traitement est nécessaire pour estimer les permutations d'une bande à l'autre (reconstruction du spectre des sources). Nous ne traitons pas ce problème qui a été résolu dans [Cap95].

Nous nous sommes focalisés sur les problèmes qui sont, selon nous, responsables de l'échec des algorithmes classiques sur des données expérimentales fortement bruitées. Citons en par-

ticulier le manque de robustesse de l'estimation du nombre de composantes en présence de bruits spatialement corrélés ainsi que le problème de décorrélation à l'ordre deux dans ce même contexte. Les solutions apportées ne font pas l'hypothèse de gaussianité ni celle de blancheur spatiale des bruits. Elles supposent en revanche que les sources sont des sommes de fréquences pures et que les durées de corrélation des bruits sont approximativement connues. Nous utilisons alors un retard τ pour construire des matrices spectrales d'observations décalées. Ces matrices, faiblement perturbées par le bruit, que nous dénommons matrices spectrales décalées permettent de déterminer le nombre de sources et de réaliser la séparation. Nous montrons que l'adjonction d'une étape de réduction de bruit est équivalente à la maximisation directe du Rapport Signal à Bruit des sorties du séparateur. Les sorties sont donc débruitées à l'aide d'un filtre de Wiener multi-références. Ce filtre utilise, à chaque fois que cela est possible, des références bruit seul obtenues par projection des observations sur le sous-espace bruit.

Nous avons évoqué brièvement les sujets que nous allons aborder. Récapitulons à présent le plan de notre exposé.

La première partie est découpée en 3 chapitres. Le chapitre 1 présente une modélisation des signaux que nous allons manipuler. La littérature sur les vibrations de machines tournantes indique que les signaux émis possèdent une composante déterministe qui peut se modéliser comme une somme de fréquences pures. En faisant l'hypothèse réaliste de fréquences pures à phase à l'origine aléatoire nous étudions les propriétés d'indépendance, de stationnarité et d'ergodicité de ces signaux pour justifier l'emploi d'outils statistiques. Le chapitre 2 expose la modélisation et la problématique de la séparation de signaux dans le cadre du modèle de mélange linéaire bruité. Nous envisageons la présence de bruits spatialement corrélés. Nous introduisons ensuite le problème des indéterminations liées au modèle. Nous abordons quelques points de terminologie en séparation de signaux. Pour terminer ces préliminaires nous faisons un rappel sur les principaux critères qui permettent de mesurer la qualité de la séparation sur des données synthétiques. Dans le chapitre 3 nous faisons un rapide tour d'horizon des techniques actuelles. Nous portons notre attention sur la nécessité pour ces méthodes de connaître le nombre de sources mélangées et sur leur capacité à traiter des mélanges convolutifs et surtout bruités.

La seconde partie a pour objectif de mettre en place une technique de séparation adaptée aux signaux vibratoires et robuste aux bruits additifs. Elle est découpée en 3 chapitres. Le chapitre 4 définit tout d'abord les matrices spectrales décalées et leurs estimateurs. Nous calculons l'estimateur non biaisé pour des composantes sinusoïdales. Dans le chapitre 5, nous développons la méthode totale de séparation de signaux à spectre de raies à l'aide des matrices spectrales décalées en supposant le nombre de sources connu. Nous proposons une méthode d'analyse en Composantes Principales robuste à des bruits additifs spatialement corrélés en utilisant des matrices spectrales décalées et une modélisation sinusoïdale des sources. Le chapitre 6 traite ensuite de l'estimation du nombre de sources temporellement corrélées dans un contexte fortement bruité.

La troisième et dernière partie, constituée du chapitre 7, présente les résultats obtenus

sur les signaux expérimentaux provenant d'un banc de test de la Direction Générale pour l'Armement. Les signaux sont tout d'abord étudiés en détail puis les résultats de l'estimation du nombre de sources, du blanchiment et de la séparation complète sont analysés à leur tour.

Première partie

OUTILS ET SIGNAUX

Chapitre 1

Modélisation des signaux

1.1 Introduction

L'application qui nous intéresse est celle dans laquelle un ensemble de machines tournantes émet des vibrations. Les principales sources de vibrations sont périodiques car elles proviennent des éléments tournants. En première approximation les signaux vibratoires peuvent se modéliser comme des signaux déterministes constitués de sommes de fréquences pures. Si la vitesse de rotation est constante les signaux possèdent des composantes aux harmoniques de la fréquence de rotation et à d'autres fréquences en raison de l'existence de modulations d'amplitude. Les signaux sont collectés par des accéléromètres placés sur le socle et les carénages des machines. Lorsque plusieurs machines disposées sur un même socle fonctionnent à des vitesses proches et en régime stationnaire, les signaux vibratoires émis possèdent des fréquences fondamentales proches. Les capteurs enregistrent un mélange de toutes ces sources.

Pour séparer les contributions provenant de chaque machine, nous souhaitons mettre en oeuvre des techniques de séparation de signaux. Les méthodes existantes supposent que les signaux sont aléatoires. Elles exploitent des critères d'indépendance statistique pour restituer après traitement des composantes ou "sources" les plus indépendantes possibles. Ces critères peuvent être exacts ou approchés (indépendance jusqu'à l'ordre quatre par exemple). On invoque la stationnarité et l'ergodisme conjoints des signaux pour obtenir une mesure d'indépendance sur une seule réalisation de l'ensemble des capteurs.

Mais les critères d'indépendance sont-ils applicables alors que les signaux considérés sont déterministes¹ ? On a coutume de contourner cette question en considérant que les signaux possèdent un ou des paramètres aléatoires. Ceci sous-entend que l'on adopte un modèle stochastique particulier (choix des paramètres aléatoires et de leurs lois). Il faut alors étudier les propriétés de stationnarité et d'ergodisme des signaux mono et multidimensionnels ainsi modélisés. Il faut aussi étudier sous quelles conditions deux signaux à paramètres aléatoires

¹La frontière entre déterministe et aléatoire relève d'une discussion philosophique. On a coutume de considérer déterministes les signaux que l'on peut générer à l'identique en répétant l'expérience dans les mêmes conditions. On parle de signaux aléatoires dès lors que notre connaissance des conditions expérimentales ou du processus générateur est incomplète.

sont indépendants. Nous présentons le cas des fréquences pures que nous allons retrouver dans tout le manuscrit.

Au paragraphe 1.2 nous indiquons les différentes sources de vibrations des signaux expérimentaux de machines tournantes. Nous précisons les périodicités auxquelles sont rattachés ces phénomènes.

Au paragraphe 1.3 nous rappelons dans quelles conditions une sinusoïde à phase à l'origine aléatoire est stationnaire et ergodique.

Au paragraphe 1.4 nous montrons qu'un couple de sinusoïdes peut être vu comme la réalisation d'un couple de variables aléatoires conjointement stationnaires, ergodiques et indépendantes à condition que les fréquences soient incommensurables. Ceci permet alors de justifier l'emploi d'outils statistiques et de mesures d'indépendance statistique sur les signaux de machines tournantes.

1.2 Modèle des signaux vibratoires

Les machines tournantes possèdent de nombreuses sources de vibrations : aérodynamiques, mécaniques ou électromagnétiques. Dans la thèse de S. Dérou [Dér92], on trouvera un inventaire complet des sources de vibration. Elles forment des familles d'harmoniques à des fréquences fondamentales diverses. Citons les principales :

- le balourd d'origine mécanique, lié à un mauvais centrage des parties tournantes. Il apparaît à la fréquence de rotation,
- l'usure de roulement dans les bagues et les cages. Les vibrations apparaissent aux fréquences de roulement calculées à l'aide des dimensions des éléments et du nombre de billes dans les roulements,
- les vibrations d'engrenage sont produites principalement par le choc entre les dents. Le modèle mécanique est rappelé dans la thèse de C. Capdessus [C.C92] et récrit en terme de traitement du signal. La vibration produite par l'engrenage est composée d'un terme périodique dû aux variations de l'élasticité des dents, dont la période appelée période d'engrènement, est la durée de passage d'une dent complète en un point donné. Ce terme de base est modulé en amplitude par la somme de deux termes liés à la forme des dents de la roue. Cette forme peut varier d'une dent à l'autre et pour chaque roue. La modulation engendrée par chaque roue est périodique à la période de rotation de cette roue. Il en résulte une modulation globale,
- les vibrations d'origine électromagnétique sont liées aux champs électromagnétiques (presque sinusoïdaux) créés dans toute machine électrique dans l'entrefer (entre le rotor et le stator). Ces champs engendrent des forces de Laplace sur les conducteurs parcourus par des courants électriques (bobines des électro-aimants) et des forces de Maxwell sur les matériaux magnétiques soumis aux champs électromagnétiques. Rappelons que les

forces de Laplace sont liées linéairement à l'induction magnétique :

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d\mathbf{F} & : \text{vecteur force de Laplace} \\ I & : \text{courant} \\ d\mathbf{l} & : \text{vecteur élémentaire de longueur du conducteur} \\ \mathbf{B} & : \text{vecteur d'induction magnétique} \end{cases}$$

et que les forces de Maxwell sont liées au carré de l'induction magnétique :

$$d\mathbf{F} = \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} d\mathbf{S} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d\mathbf{F} & : \text{force de Maxwell} \\ \mu_0 & : \text{perméabilité du matériau} \\ d\mathbf{S} & : \text{surface du matériau magnétique} \\ \mathbf{B} & : \text{induction magnétique} \end{cases}$$

Les forces de Maxwell sont périodiques à la fréquence double de la fréquence électrique qui dépend du type de machine (nombre de paire de pôles, machines synchrone ou asynchrone). Les forces créées possèdent des harmoniques en raison des non linéarités existant dans les machines électriques (variations de champs magnétiques provoquées par les encoches des bobines par exemple).

D'après [Dér92], on peut prévoir qualitativement l'allure du spectre vibratoire d'une machine. Il sera la réponse de la structure aux sources d'excitation citées, à savoir des raies auxquelles s'ajoute le bruit de fond des sources aérodynamiques. Dans les signaux expérimentaux nous trouverons donc *a priori* des composantes sinusoïdales pures liées à des phénomènes d'origines mécaniques (raies discrètes aux multiples entiers de la fréquence de rotation) et électromagnétiques (raies discrètes aux multiples entiers de la fréquence électrique) ainsi que des sources modulées liées aux engrenages (ou réducteurs).

En première approximation, nous considérerons uniquement le cas de sinusoïdes déterministes. On appellera sources dans la suite, ce type de signaux caractéristiques des éléments des bancs et de ses défauts éventuels que l'on cherchera à séparer dans un canal fréquentiel.

1.3 Etude d'une sinusoïde à paramètre aléatoire

Comme le font remarquer Blanc-Lapierre et Fortet dans [BLF53, p.6], il existe toujours des conditions expérimentales inconnues et non reproductibles (agitation thermique, pression, champs magnétiques...). Par conséquent, pour un expérimentateur tous les signaux possèdent un caractère aléatoire. Ainsi il est impossible de prévoir à l'avance la valeur exacte de la phase à l'origine d'une sinusoïde fournie par un système physique. Cette expérience peut être vue comme une épreuve ω à laquelle est associée une variable aléatoire $\phi(\omega)$ qui désigne la phase du signal aléatoire $X(t, \omega) = A \sin(2\pi ft + \phi(\omega))$. Puisqu'on ne peut modéliser tous les phénomènes physiques qui engendrent la phase il paraît judicieux de supposer qu'elle est uniformément répartie sur un intervalle de longueur 2π . Une sinusoïde d'amplitude, fréquence et phase constantes peut donc être vue comme une réalisation du signal aléatoire $X(t, \omega)$, avec une phase à l'origine aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$. On pourrait aussi considérer

l'amplitude et la fréquence comme des paramètres aléatoires. Il faudrait alors choisir la loi de probabilité de ces paramètres en fonction du processus générateur. Pour pouvoir modéliser de façon simple les signaux de machines tournantes comme des signaux aléatoires stationnaires et ergodiques, nous verrons que nous devons retenir le modèle de sinusoides à phase aléatoire uniformément répartie entre 0 et 2π .

Profitons de quelques rappels sur les signaux aléatoires pour donner les notations que nous allons utiliser. Un signal aléatoire (ou processus stochastique) est une famille de variables aléatoires $X(t, \omega)$ indexées par le temps t et dépendant toutes d'une même épreuve ω . On note $x(t) = X(t, \omega)$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$ (ensemble des événements possibles ou encore *ensemble fondamental*). La fonction $x(t) = X(t, \omega_0)$ obtenue pour un événement ω_0 est un signal déterministe qui représente une réalisation du processus stochastique. La grandeur $x = X(t_0, \omega)$ obtenue à un instant t_0 est une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé associé à Ω . Elle est caractérisée par sa fonction de répartition $F_x(u) = \Pr[x \leq u]$ qui représente la probabilité d'apparition de x dans l'intervalle $]-\infty; u]$. Si x admet une densité de probabilité $p_x(u)$ au sens des fonctions ou au sens des distributions, on a $dF_x(u) = p_x(u) du$.

1.3.1 Stationnarité au sens strict

Un signal aléatoire $X(t, \omega)$ est *stationnaire au sens strict* lorsque les familles de variables aléatoires $X(t, \omega)$ et $X(t + \tau, \omega)$ ont les mêmes propriétés statistiques quelles que soient t et τ [Pic93, p.178], [BLF53, p.418]. C'est-à-dire que pour des valeurs $\{t_0, t_1, \dots, t_i\}$ quelconques en nombre fini, la densité de probabilité conjointe ou la fonction de répartition de $\{X(t_0 + \tau, \omega), X(t_1 + \tau, \omega), \dots, X(t_i + \tau, \omega)\}$ est invariante par rapport à τ ; elle ne dépend que de la position relative des $(i + 1)$ variables aléatoires sur l'axe des temps et non de leur position absolue. Cette définition est indépendante de l'existence de moments, mais lorsqu'ils existent on retrouve la même condition d'invariance sur tous les moments à tous les ordres.

Pour un processus strictement stationnaire les moyennes d'ensemble, lorsqu'elles existent, sont des fonctions déterministes des écarts $(t_1 - t_0, \dots, t_i - t_0)$. Pour un processus non stationnaire elles sont en général des fonctions de $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \tau\}$.

Dans le cas où $X(t, \omega)$ est une sinusoïde à paramètres aléatoires, on montre [Pic93, p.179] que si l'amplitude est le seul paramètre aléatoire alors $x(t)$ n'est pas stationnaire. En effet, le moment $E[X(t, \omega)X(t - \tau, \omega)]$ dépend de t et τ . Pour que ce moment ne dépende que de τ , il est nécessaire (mais pas suffisant) que la fréquence ou la phase soient des paramètres aléatoires.

On montre dans [Pic93, p.178] que si la phase est le seul paramètre aléatoire et si elle est uniformément répartie entre 0 et 2π alors la sinusoïde est strictement stationnaire. Ceci provient du fait que la loi de la phase est indépendante du temps.

On montre aussi dans [Pic93, p.195] qu'une sinusoïde à amplitude et phase aléatoires est strictement stationnaire si et seulement si ces deux paramètres sont indépendants et si la phase est uniformément réparti entre 0 et 2π .

L'interprétation physique et la simplicité du modèle motivent le choix d'un seul paramètre aléatoire, une phase uniformément répartie entre 0 et 2π . Dans la suite, nous utilisons ce modèle.

1.3.2 Ergodisme au sens large et au sens strict

Les propriétés d'ergodisme montrent comment les moyennes d'ensemble de $X(t, \omega)$ sont liées aux moyennes temporelles sur une réalisation particulière $X(t, \omega_0)$ ou sur l'ensemble des réalisations possibles.

Pour définir l'**ergodisme au sens large** d'un processus aléatoire $X(t, \omega)$, *non nécessairement stationnaire*, on considère la classe \mathcal{G} des fonctions g telles que $\frac{1}{T} \int_0^T g(X(t, \omega)) dt$ existe $\forall T \in \mathbb{R}$ et $\forall \omega \in \Omega$. Chaque moyenne temporelle calculée par une fonction g entre 0 et une valeur T , relative à toutes les réalisations, est une variable aléatoire. Toutes les variables obtenues à partir de g en faisant varier T forment une suite. Lorsque T tend vers l'infini, si chaque suite de variables aléatoires (pour chaque fonction de la classe \mathcal{G}) tend vers une variable aléatoire limite, on dit que le système est ergodique au sens large [BLF53, p.113]. Suivant le type de convergence des variables aléatoires vers la v.a. limite, on définit différents types d'ergodisme (en probabilité, en moyenne quadratique, en loi ou presque sûrement).

Pour définir l'**ergodisme au sens strict** on considère le cas d'un signal aléatoire *stationnaire au sens strict*. On sait que pour un tel signal les moyennes d'ensemble sont des nombres certains. Lorsque la v.a. limite évoquée précédemment se réduit (au sens de la convergence des v.a.) à un nombre certain égal à la moyenne d'ensemble on dit que le signal est ergodique au sens strict [BLF53, p.113].

En pratique, on démontre ces conditions d'ergodisme (au sens large ou au sens strict) sur la moyenne $\frac{1}{T} \int_0^T X(t, \omega) dt$ ou sur la covariance $\frac{1}{T} \int_0^T X(t, \omega) X(t - \tau, \omega) dt$. On parle alors d'ergodisme (au sens large ou au sens strict) à l'ordre 1 ou à l'ordre 2.

Il existe une **définition plus générale de l'ergodisme au sens strict** [Bri81, p.43]. On dit qu'un signal aléatoire stationnaire est ergodique au sens strict lorsque, quelle que soit la fonction g à valeurs réelles telle que $E[|g(X(t, \omega))|]$ soit borné et quelle que soit la réalisation $X(t, \omega_0)$, on a :

- $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(X(t, \omega_0)) dt$ existe et est indépendante de la réalisation ω_0 ,
- la limite précédente est égale à la moyenne d'ensemble $E[g(X(t, \omega))]$.

Pour une sinusoïde à phase aléatoire $\phi(\omega)$ la propriété d'ergodisme est totalement liée à la répartition de la phase aléatoire [Pic93, p.184]. Prenons l'exemple du moment d'ordre 1. La moyenne temporelle $(\frac{1}{T} \int_0^T X(t, \omega_0) dt)$ tend vers zéro quand T tend vers $+\infty$, quelle que soit la réalisation ω_0 , tandis que la moyenne d'ensemble $E[X(t, \omega)]$ n'est pas nulle pour certaines lois de probabilité de $\phi(\omega)$.

Pour une sinusoïde à phase aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, on trouve dans la littérature la démonstration de l'ergodisme au sens strict sur la moyenne [Pic93, p.183] et sur la covariance [Pic93, p.226]. Nous démontrons l'ergodisme générale au

sens strict de ce signal aléatoire stationnaire en annexe A.1.

En conclusion, une sinusoïde à paramètres déterministes peut être vue comme la réalisation d'un signal aléatoire, stationnaire et ergodique au sens strict dont le paramètre aléatoire est la phase à l'origine de densité de probabilité uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1.4 Etude d'un couple de sinusoïdes à phase aléatoire

1.4.1 Stationnarité au sens strict

La définition de la stationnarité stricte s'étend facilement à un couple de signaux aléatoires [BLF53, p.418]. Un signal aléatoire à deux dimensions $\{X_1(t, \omega), X_2(t, \omega)\}$ est conjointement stationnaire au sens strict lorsque, quelles que soient les valeurs $\{t_0, t_1, \dots, t_i\}$ en nombre fini et les indices $\{a_0, a_1, \dots, a_i\} \in \{1, 2\}$, la densité de probabilité conjointe de $\{X_{a_0}(t_0 + \tau, \omega), X_{a_1}(t_1 + \tau, \omega), \dots, X_{a_i}(t_i + \tau, \omega)\}$ est invariante par rapport à τ .

Considérons un couple de sinusoïdes $X_i(t, \omega) = A_i \sin(2\pi f_i t + \phi_i)$ avec $(i = 1, 2)$ d'amplitudes A_i et fréquences f_i déterministes et de phases ϕ_i , aléatoires indépendantes et uniformément réparties entre 0 et 2π . Puisque les phases (donc les signaux) sont indépendantes, la loi conjointe des variables aléatoires est le produit des lois de probabilité. La stationnarité stricte de chaque composante entraîne donc la stationnarité conjointe au sens strict du signal bidimensionnel $\{X_1(t, \omega), X_2(t, \omega)\}$. Ceci est vérifié quelles que soient les valeurs des fréquences f_i .

1.4.2 Ergodisme au sens strict

La **définition générale de l'ergodisme au sens strict** s'étend aussi facilement à un couple de signaux aléatoires [Bri81, p.43]. Soit le signal bidimensionnel $\{X_1(t, \omega), X_2(t, \omega)\}$ conjointement stationnaire au sens strict et g une fonction réelle de deux variables réelles. On dit que $\{X_1(t, \omega), X_2(t, \omega)\}$ est ergodique au sens strict lorsque, quelle que soit la fonction g telle que $E[|g(X_i(t, \omega), X_k(t, \omega))|], \{i, k\} \in \{1, 2\}$ est bornée et quelle que soit la réalisation à deux dimensions $\{X_1(t, \omega_0), X_2(t, \omega_0)\}$, on a :

- $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(X_i(t, \omega_0), X_k(t, \omega_0)) dt$ existe et est indépendante de la réalisation ω_0 , $\{i, k\} \in \{1, 2\}$
- la limite précédente est égale à la moyenne d'ensemble $E[g(X_i(t, \omega), X_k(t, \omega))], \{i, k\} \in \{1, 2\}$.

Considérons un couple de sinusoïdes $X_i(t, \omega) = A_i \sin(2\pi f_i t + \phi_i)$ avec $(i = 1, 2)$ d'amplitudes A_i et fréquences f_i déterministes et de phases ϕ_i , aléatoires indépendantes et uniformément réparties entre 0 et 2π . Nous démontrons en annexe A.2 que ce couple est conjointement ergodique au sens strict sous l'hypothèse que les fréquences f_i vérifient :

$$\frac{f_1}{f_2} \neq \frac{P}{Q} \quad \text{avec} \quad \{P, Q\} \in \mathbb{Z}$$

En conclusion, un couple de sinusoides à paramètres déterministes et de fréquences incommensurables peut être vu comme la réalisation d'un couple de signaux aléatoires, indépendants, conjointement stationnaires et ergodiques. Nous pouvons donc appliquer à ce type de signaux déterministes des outils statistiques (par exemple aux ordres supérieurs) et estimer des mesures d'indépendance statistiques sur une réalisation.

1.5 Conclusion

Nous rappelons que le signal vibratoire d'une machine tournante est le résultat des phénomènes de balourd, d'usure des roulements à bille, d'imperfection des engrenages et de forces mécaniques créées par les champs magnétiques périodiques. A ce signal "utile" s'ajoutent des bruits vibratoires liés aux sources aérodynamiques. En première approximation, nous considérons que le signal utile est porté par des fréquences pures (ou des sinusoides). Pour pouvoir utiliser les méthodes de séparation de signaux fondées sur des mesures d'indépendance, nous montrons qu'un couple de sinusoides à paramètres déterministes et de fréquences incommensurables peut être vu comme la réalisation d'un couple de signaux aléatoires, indépendants, conjointement stationnaires et ergodiques. En pratique on peut supposer que les signaux possèdent des fréquences incommensurables surtout si l'on traite le signal par petites bandes de fréquence (peu de composantes dans chaque bande). Nous avons donc donné dans ce chapitre les conditions qui nous permettront d'estimer des mesures d'indépendance sur les signaux expérimentaux par des moyennes temporelles sur une réalisation.

Chapitre 2

Problématique de la séparation de signaux

2.1 Introduction

La *séparation de signaux* s'inscrit dans le cadre général d'un schéma de communication à plusieurs émetteurs et plusieurs récepteurs. Les émetteurs ou *sources*¹ produisent des signaux qui se propagent dans un milieu physique. Les récepteurs ou *capteurs* reçoivent ces signaux altérés. Le modèle le plus général de propagation est un modèle non linéaire. Il semble malheureusement trop complexe pour être résolu. Des travaux récents ont pris en compte des non-linéarités instantanées intervenant au moment de l'acquisition des signaux [TJ99] et qui portent le nom de *post-non-linéarités*. Nous conservons l'hypothèse classique d'un milieu de propagation *déterministe et linéaire*. Ajoutons l'hypothèse de *stationnarité*² tout en notant que les méthodes adaptatives sont applicables lorsque le milieu n'est pas stationnaire. Les altérations du signal proviennent de phénomènes de *trajets multiples*. Chaque capteur reçoit une contribution de toutes les sources. La *superposition* de ces contributions produit un *signal de mélange* auquel s'ajoute une composante de bruit. L'objectif de la séparation de signaux est de retrouver les sources avant mélange, ou de façon équivalente les filtres modélisant le milieu de propagation. On a coutume de supposer que les bruits proviennent uniquement de l'électronique des capteurs. Ceci permet de les supposer gaussiens (grand nombre de causes petites à effets additifs) temporellement blancs, mutuellement indépendants et de même puissance (calibration des capteurs). Nous serons amenés à abandonner cette modélisation qui est rarement réaliste. En effet, dans de nombreuses situations réelles, des sources parasites ou *brouilleurs* émettent des bruits qui se propagent vers l'ensemble des capteurs. Nous considérons donc que les *observations* sont perturbées par des bruits pouvant être spatialement et temporellement corrélés et non nécessairement gaussiens.

Au paragraphe 2.2 nous formalisons le problème qui vient d'être décrit, à l'aide du *modèle*

¹Par abus de langage les signaux émis par les sources sont eux-même dénommés *sources*.

²Au premier chapitre nous avons modélisé les sources de vibrations comme des sommes de fréquences pures à phase aléatoire et nous avons montré sous quelles conditions elles sont stationnaires.

convolutif. Nous présentons aussi le *modèle instantané* et le *modèle spectral*. Au paragraphe 2.3 nous exposons les hypothèses minimales sur les signaux et les indéterminations qui leurs sont associées vis-à-vis de chaque modèle. Ceci nous conduit directement à donner au paragraphe 2.4 une classification des problèmes de séparation en fonction des hypothèses, de l'objectif recherché et des connaissances *a priori*. Les problèmes d'identifiabilité et de séparabilité sont abordés au paragraphe 2.5. Pour que ce tour d'horizon soit plus complet nous indiquons au paragraphe 2.6 comment mesurer la qualité de la séparation dans diverses situations.

2.2 Modèles de mélange

Devant l'émergence actuelle des techniques numériques nous avons choisi de considérer des signaux discrétisés en temps (variable t) et en fréquence (variable f). Nous supposons que n_s sources et n_b brouilleurs émettent des signaux en direction de n capteurs (avec $n_s < n$). Chaque capteur reçoit un mélange des sources et un mélange des bruits. Dans le cas général les bruits reçus sont temporellement et spatialement corrélés. Bien que de nombreux algorithmes ne prennent pas en compte la présence de bruit et que les autres considèrent des bruits spatialement et temporellement blancs, nous choisissons ce modèle qui est à nos yeux le plus réaliste. En particulier, lorsque le réseau de capteurs a été sous-dimensionné ($n < n_s$) alors $(n_s - n)$ sources sont vues comme des bruits spatialement corrélés.

Nous présentons dans un premier temps le *modèle convolutif* qui est le modèle linéaire et stationnaire le plus général. Nous donnons ensuite le *modèle instantané* qui est utilisé dans de nombreuses méthodes, malgré son manque de généralité. Puis nous décrivons le *modèle spectral* qui permet de représenter le mélange convolutif par des mélanges instantanés fréquentiels.

Enfin nous abordons le cas particulier du modèle de *traitement d'antenne*.

2.2.1 Modèle convolutif

Le milieu de propagation qui a été décrit en introduction se comporte comme un système linéaire invariant dans le temps (SLIT). En absence de bruit il est caractérisé par les $(n \cdot n_s)$ réponses impulsionnelles $h_{ik}(t)$ qui traduisent la propagation des sources vers les capteurs. L'existence physique de ces filtres implique qu'ils sont causaux et stables. Le mélange non bruité $y_i(t)$ reçu par le i ème capteur est la somme des filtrées linéaires et homogènes de toutes les sources $s_k(t)$ vers ce capteur :

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^{n_s} (h_{ik} * s_k)(t) = \sum_{k=1}^{n_s} \sum_{p=0}^{+\infty} h_{ik}(p) s_k(t-p), \quad \begin{cases} t \in \mathbb{Z} \\ i \in [1, n] \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce mélange est perturbé par un bruit $b_i(t)$ qui peut se modéliser comme la somme des filtrées linéaires et homogènes de n_b bruits spatialement blancs notés $n_q(t)$:

$$b_i(t) = \sum_{q=1}^{n_b} (l_{iq} * z_q)(t) = \sum_{q=1}^{n_b} \sum_{m=0}^{+\infty} l_{iq}(m) n_q(t-m), \quad \begin{cases} t \in \mathbb{Z} \\ i \in [1, n] \end{cases} \quad (2.2)$$

Les mélanges non bruités et les bruits constituent respectivement les vecteurs $\mathbf{y}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$ de taille $n \times 1$. Les signaux mesurés par les capteurs sont regroupés dans le vecteur $\mathbf{r}(t)$ dont l'écriture matricielle est :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbf{H}_p \mathbf{s}(t-p) + \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{L}_m \mathbf{n}(t-m), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

où \mathbf{H}_p est la matrice $n \times n_s$ des coefficients $h_{ik}(p)$, $\mathbf{s}(t)$ est le vecteur $n_s \times 1$ des sources à l'instant t , \mathbf{L}_m est la matrice $n \times n_b$ des coefficients $l_{iq}(m)$ et $\mathbf{n}(t)$ est le vecteur $n_b \times 1$ des bruits spatialement blancs émis par les brouilleurs. Pour que le problème soit soluble, on suppose que la matrice \mathbf{H}_0 est de rang plein. Si les composantes du vecteur $\mathbf{n}(t)$ sont temporellement blanches (en plus de la blancheur spatiale), les matrices \mathbf{L}_m déterminent complètement les corrélations temporelles et spatiales des composantes de $\mathbf{b}(t)$. Lorsque $n_b = n$, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{I}_n$ et $\mathbf{L}_m = \mathbf{0}$ pour $m \neq 0$ on retrouve l'hypothèse classique des bruits spatialement blancs.

La séparation de mélanges convolutifs peut s'appliquer à un grand nombre de problèmes. Les applications actuelles concernent essentiellement les mélanges non bruités ou faiblement bruités. Lorsqu'ils sont pris en compte, les bruits sont supposés gaussiens et spatialement blancs. Citons quelques domaines d'application : le rehaussement de la parole [NTJ95], la séparation de signaux audio et de parole [Tor99] [WB99], les communications [RJ99], la surveillance de machines tournantes [GCD99] et le sonar [MBE97].

2.2.2 Modèle instantané

Un mélange est dit instantané s'il est sans mémoire, c'est-à-dire si $\mathbf{H}_p = \mathbf{0}$ pour $p \neq 0$, on obtient alors :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) = \mathbf{H}_0 \mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.4)$$

Ce modèle est peu réaliste pour décrire une propagation sources-capteurs, en revanche il est adapté à d'autres types de problèmes. Citons l'extraction de composantes indépendantes dans les images naturelles [ZL99], la décomposition d'images sur des bases de composantes indépendantes pour le codage et la compression [PA99], la séparation de l'influence de la température sur un capteur magnétique [PIJ⁺98].

Le modèle instantané peut être utilisé comme un modèle approché de propagation dans deux situations particulières :

1. Lorsque les réponses impulsionnelles sont courtes devant la période d'échantillonnage³ T_e (ou la période symbole T_s en communication numérique) et que les fonctions de transfert

³Dans le respect de la condition de Shannon ceci sous-entend que la bande passante des sources est petite devant celle des filtres.

sont constantes (en module et en phase) sur la bande passante des sources B_s . Dans cette situation, vis-à-vis des sources, les fonctions de transfert sont indéterminées en dehors de B_s . On peut lever l'indétermination en les prolongeant en dehors de B_s . Ceci signifie que l'on choisit la classe des mélanges instantanés pour résoudre le problème. Cette modélisation a été utilisée avec succès pour des applications biomédicales concernant les électro-encéphalogrammes [JMW⁺99] et les magnéto-encéphalogrammes [VSJO99].

2. Lorsque les sources sont à bande limitée relativement étroite autour d'une fréquence ν_0 élevée et que l'on réalise une démodulation complexe pour procéder à des traitements en bande de base⁴. En effet, en supposant que les fonctions de transfert évoluent lentement autour de ν_0 on obtient, après démodulation, le modèle instantané complexe

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{H}(\nu_0)\tilde{\mathbf{s}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{s}(t) e^{-j2\pi\nu_0 t} \\ \tilde{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{b}(t) e^{-j2\pi\nu_0 t} \end{cases} \quad (2.5)$$

où $\mathbf{H}(\nu_0)$ est la matrice des gains complexes des filtres à la fréquence ν_0 tandis que $\tilde{\mathbf{r}}(t)$, $\tilde{\mathbf{s}}(t)$ et $\tilde{\mathbf{b}}(t)$ sont les vecteurs temporels complexes des observations, des sources et des bruits ramenés en bande de base. Lorsque le spectre des sources est à symétrie hermitienne autour de ν_0 on obtient, après filtrage passe-bas, un mélange instantané réel. Le modèle décrit par la relation (2.5) a été utilisé en communication ionosphérique HF [CCC99], en communication mobile [FK99], en radar [CM96], en surveillance d'aéroports [CCM93], en identification de badges [DDC99], et dans d'autres applications. Il est important de remarquer que dans le cas de sources multi-bande étroite le mélange convolutif ne peut plus être approché par un seul mélange instantané mais par plusieurs.

2.2.3 Modèle spectral

Le modèle spectral est déduit du modèle temporel par Transformée de Fourier en fréquence réduite (TFR), lorsque les TFR existent pour tous les signaux. On obtient une succession de mélanges instantanés fréquentiels :

$$\mathbf{r}(\nu) = \mathbf{y}(\nu) + \mathbf{b}(\nu) = \mathbf{H}(\nu)\mathbf{s}(\nu) + \mathbf{b}(\nu), \quad \nu \in]-1/2, 1/2] \quad (2.6)$$

où $\mathbf{H}(\nu)$ est la matrice des gains complexes des filtres à la fréquence ν tandis que $\mathbf{r}(\nu)$, $\mathbf{s}(\nu)$ et $\mathbf{b}(\nu)$ sont les vecteurs des observations, des sources et des bruits. Dans le cas général, on ne peut pas garantir l'existence de la TFR pour tous les signaux du mélange. Il faut abandonner cette transformée qui de toute façon ne permet pas de réaliser la séparation à partir d'une seule réalisation puisqu'elle ne fournit qu'une observation vectorielle à chaque fréquence. Pour accéder à l'information statistique fréquentielle à partir d'une seule réalisation temporelle il faut postuler la stationnarité et l'ergodisme et réaliser des Transformées de Fourier à Court Terme. On sélectionne des tranches de N échantillons par une fenêtre d'apodisation glissante $a_N(t)$. Les signaux numériques apodisés admettent une TFR car ils sont absolument sommables (les

⁴L'intérêt est de pouvoir utiliser de faibles cadences d'échantillonnage.

échantillons ne prennent que des valeurs finies). On utilise en pratique la Transformée de Fourier Discrète (TFD). En contrepartie de l'analyse à durée limitée le modèle spectral obtenu par TFD est quelque peu différent du modèle décrit par la relation (2.6). En effet, la TFD d'un produit de convolution linéaire n'est pas strictement égal au produit des TFD (voir en annexe B.1). On obtient

$$\mathbf{r}^t(f) = A_N(f) \circledast [\mathbf{H}(f) \mathbf{s}^t(f) + \mathbf{b}^t(f)] + \mathbf{e}^t(f), \quad f \in \left[-\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2}\right] \quad (2.7)$$

où $A_N(f)$ est la TFD de la fenêtre d'apodisation, \circledast est le produit de convolution circulaire, $\mathbf{r}^t(f)$, $\mathbf{s}^t(f)$ et $\mathbf{b}^t(f)$ sont les TFD des observations, des sources et des bruits sur la fenêtre temporelle $[t, \dots, t + N - 1]$, $\mathbf{e}^t(f)$ est un terme d'erreur qui traduit la différence entre le produit de convolution linéaire et le produit de convolution circulaire associé à la TFD. Ce modèle sous-entend que les réponses impulsionnelles des filtres sont de longueur inférieure à la taille des tranches de TFD. Le terme d'erreur peut être négligé lorsque l'énergie des réponses impulsionnelles est faible devant l'énergie de la fenêtre d'apodisation. Nous supposons que N est choisi suffisamment grand pour que ceci soit vérifié. On montre en annexe B.1 que le choix de l'apodisation uniforme permet de simplifier substantiellement le modèle et de l'approcher par :

$$\mathbf{r}^t(f) \simeq \underbrace{\mathbf{H}(f) \mathbf{s}^t(f)}_{\mathbf{y}^t(f)} + \mathbf{b}^t(f) \quad (2.8)$$

Le mélange convolutif temporel est remplacé par une succession de mélanges instantanés complexes. Cette approximation se justifie encore mieux en présence de sources multi-bande étroite. En raison de l'analyse à durée limitée la notion de mélange est toujours présente dans les canaux fréquentiel ; deux fréquences pures de fréquences proches ne sont pas dissociées. Le nombre de composantes-sources présentes dans un canal fréquentiel dépend non seulement du contenu spectral des sources mais aussi de la résolution choisie. Une étape d'estimation du nombre de composantes est nécessaire.

Résumons les principales caractéristiques du modèle spectral :

- l'opérateur de séparation doit être appliqué sur les TFD non apodisés (apodisation uniforme) pour que le mélange spectral (équation 2.8) soit valide.
- en raison de la résolution imposée par le nombre d'échantillons N des TFD, une étape d'estimation du nombre de composantes-sources est nécessaire, dans chaque canal fréquentiel.
- pour des signaux stationnaires dont les multicorrélations à tous les ordres sont intégrables, la TFD de N v.a. temporelles fournit des v.a. fréquentielles asymptotiquement gaussiennes lorsque N augmente. C'est le cas par exemple des signaux à supports de multicorrélation finis [Bri81, p94]. Dans le cas des fréquences pures, dont les multicorrélations ont des supports infinis, V. Capdevielle a montré dans [Cap95, p35] la non-convergence des TFD vers la gaussianité. L'emploi de statistiques d'ordre supérieur reste justifié pour de tels signaux.

- le choix de N doit permettre d’obtenir, dans chaque canal fréquentiel, moins de composantes-sources que de capteurs tout en faisant un compromis entre le terme d’erreur $\mathbf{e}^t(f)$, le coût de calcul et le risque de gaussianisation (si les sources ne sont pas strictement sinusoïdales).
- en raison des indéterminations du modèle spectral (paragraphe 2.5.5) il ne suffit pas de traiter les mélanges instantanés fréquentiels séparément. D’une part des permutations apparaissent d’un canal fréquentiel au suivant (paragraphe 2.5.5) et il faut déterminer un *filtre de réorganisation* qui corrige ces permutations. D’autre part les signaux sources étant normalisés en puissance dans chaque canal fréquentiel⁵, une étape de *recupération des phases et des amplitudes*, est nécessaire pour connaître les sources telles qu’elles ont été reçues sur chaque capteur.
- le modèle spectral est particulièrement bien adapté aux signaux qui ont une dynamique spectrale importante. Là où le modèle convolutif aurait tendance à privilégier les composantes spectrales les plus énergétiques le modèle spectral, lui, s’affranchit de la dynamique.
- le modèle spectral fonctionne tout aussi bien lorsque le mélange temporel est instantané que lorsqu’il est convolutif, ce qui permet de s’affranchir du choix d’un modèle.
- la séparation dans le domaine fréquentiel consiste à réaliser des produits de TFD dans chaque canal fréquentiel. En revenant dans le domaine temporel un phénomène transitoire apparaît. Il est dû à la convolution circulaire des observations et des réponses impulsionnelles des filtres de séparation. Si le filtre inverse est causal et que sa réponse impulsionnelle est courte le phénomène transitoire n’apparaît qu’au début de chaque tranche. Il peut être limité en supprimant les premiers échantillons de chaque tranche, lorsqu’elles se recouvrent temporellement. On peut aussi choisir de ne pas réaliser les opérations de séparation dans le domaine fréquentiel mais simplement d’utiliser le modèle spectral comme un moyen d’obtenir l’opérateur de séparation (il se pose alors le problème de la détection et correction des permutations d’un canal fréquentiel à l’autre). Cet opérateur peut ensuite être transposé dans le domaine temporel par TFDI et la séparation peut être obtenue par une convolution linéaire.
- les v.a. obtenues par TFD sont des variables aléatoires circulaires complexes (VACC) [Pic94] [Com94a]. Ceci conduit à ne pas utiliser des cumulants du type

$$Cum[\underbrace{r^t(f), \dots, r^t(f)}_p, \underbrace{r^t(f)^*, \dots, r^t(f)^*}_{q \neq p}]$$

dans lesquels le nombre de termes conjugués est différent du nombre de termes non conjugués. Ceci allège la charge de calcul des méthodes basées sur l’estimation des cumulants. La définition des cumulants est rappelée en annexe B.2.

⁵C’est la période du battement en amplitude autour de 1 qui différencie les sources dans un même canal de fréquence.

2.2.4 Cas particulier du traitement d'antenne

La problématique du traitement d'antenne est particulière. On suppose souvent que les sources sont en champ lointain⁶ ce qui permet de considérer que les fronts d'ondes incidents sont plans. Les signaux émis par les sources ponctuelles sont des grandeurs temporelles notées $s_k(t)$. Les signaux reçus sont des grandeurs spatio-temporelles $y_{ik}(t) = y(t, \mathbf{x}_i, \theta_k)$ où t est l'instant de mesure, \mathbf{x}_i le vecteur position du capteur i et θ_k le couple d'angles (site, azimut) définissant la position angulaire de la source k . En effectuant la TFD des signaux spatio-temporels entre les instants t et $(t + N - 1)$ on obtient des signaux spatio-fréquentiels. Le vecteur des observations spatio-fréquentielles bruitées est donné par

$$\mathbf{r}^t(f) = \sum_{k=1}^{n_s} \mathbf{a}_k(f) s_k^t(f) + \mathbf{b}^t(f), \quad f \in \left[-\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2}\right] \quad (2.9)$$

Le scalaire $s_k^t(f)$ désigne l'amplitude complexe de la source k au canal fréquentiel f en tenant compte de la fréquence réelle ν_k de la source (ν_k est proche de $\frac{f}{N}$). Le vecteur $\mathbf{a}_k(f)$ de taille $n \times 1$, dénommé *vecteur source* ou encore *vecteur directionnel*, décrit la propagation entre la source k et tous les capteurs. La géométrie du réseau de capteurs étant connue, il est possible d'exprimer le retard de propagation $\tau_i(\theta_k)$ de la source k au capteur i , par rapport au premier capteur (référence). Le vecteur-source k s'écrit alors :

$$\mathbf{a}_k(f) = H_k(f) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi \frac{f}{N} \tau_2(x_2, \theta_k, \nu_k)} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi \frac{f}{N} \tau_n(x_n, \theta_k, \nu_k)} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

où $H_k(f)$ est le gain complexe caractérisant la propagation de la source k vers l'antenne. Il est possible de normaliser le vecteur des sources en imposant $H_k(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On rencontre essentiellement deux types de problèmes en traitement d'antenne :

- les problèmes du type radar/sonar où l'on cherche à déterminer (par goniométrie ou formation de voies) les directions d'arrivée des plans d'ondes et la puissance des sources.
- les problèmes de type communication radio-mobile où l'on cherche à séparer des signaux dans une bande étroite autour d'une fréquence ν_0 . Dans ce cas le modèle spectral peut être remplacé par le modèle instantané complexe

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{s}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}(t) \quad (2.11)$$

où $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1(\nu_0), \dots, \mathbf{a}_{n_s}(\nu_0)]$ est la matrice des vecteurs directionnels.

On suppose souvent que l'antenne est un réseau rectiligne de capteurs équidistants (figure 2.1) et que les sources et les capteurs sont dans un même plan (les paramètres θ_k sont alors

⁶Ce modèle ne peut être utilisé qu'en absence de réflecteurs proches, comme par exemple en communication satellitaire ou en radar aérien.

des scalaires). Dans ce cas les vecteurs directionnels se mettent sous la forme

$$\mathbf{a}_k(\nu_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\varphi_k} \\ \vdots \\ e^{-j(n-1)\varphi_k} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \varphi_k = 2\pi\nu_0 \frac{\Delta \sin(\theta_k)}{c_{\text{milieu}}} \quad (2.12)$$

où c_{milieu} est la célérité du milieu et Δ est l'écart entre les capteurs.

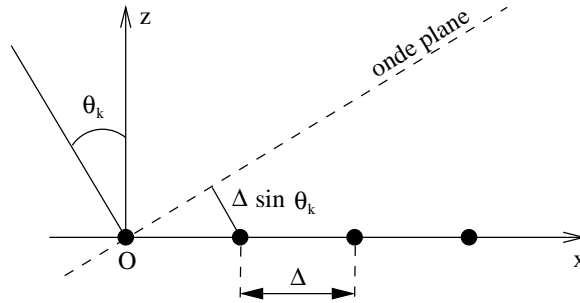


FIG. 2.1: Antenne rectiligne de capteurs équidistants

Lorsque la géométrie des plans d'onde est inconnue ou que le phénomène de multi-trajets est important, on fait appel aux techniques de séparation de signaux.

2.3 Principe de la séparation de signaux

2.3.1 Idées générales

Pour la discussion qui va suivre il est commode d'unifier tous les mélanges linéaires sous la représentation

$$\mathbf{r}(t) = [\mathbf{H}(z)] \mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.13)$$

où $\mathbf{H}(z) = \sum_{l=0}^{+\infty} \mathbf{H}_l z^{-l}$ est la fonction de transfert multidimensionnelle contenant les Transformées en Z des réponses impulsionnelles sources-capteurs. Dans le cas d'un mélange instantané la matrice $\mathbf{H}(z)$ se réduit à la matrice constante \mathbf{H}_0 . La séparation de signaux est une opération de filtrage (figure 2.2) qui consiste à déterminer et appliquer un filtre multidimensionnel $\mathbf{G}(z)$ au vecteur d'observation \mathbf{r} , pour estimer le plus fidèlement possible le vecteur d'entrée \mathbf{s} .

On distingue différents problèmes de séparation de signaux selon les connaissances disponibles pour déterminer $\mathbf{G}(z)$. Nous aborderons ce sujet au paragraphe 2.4. Les hypothèses communes à tous les problèmes de séparation sont :

- \mathcal{H}_1 : la matrice $\mathbf{H}(z)$ est de rang plein dans les colonnes (i.e. inversible à gauche),
- \mathcal{H}_2 : les sources sont mutuellement indépendantes,
- \mathcal{H}_3 : les sources sont indépendantes des bruits.

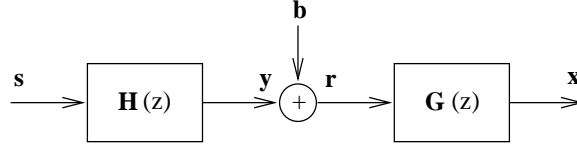


FIG. 2.2: principe de la séparation de sources

2.3.2 Séparation en absence de bruit

En absence de bruit, le filtre recherché est la pseudo-inverse de $\mathbf{H}(z)$, notée $\mathbf{H}^\#(z)$. Le couple $([\mathbf{H}(z)], \mathbf{s})$ aboutissant au mélange \mathbf{y} n'est pas défini de manière unique, c'est le problème de la non identifiabilité intrinsèque. En effet, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{H}(z) \mathbf{D}^{-1}(z) \mathbf{P}^{-1}(z)] \cdot [\mathbf{P}(z) \mathbf{D}(z)] \mathbf{s}(t) \quad (2.14)$$

$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}(z) : \text{matrices de permutations } n_s \times n_s \\ \mathbf{D}(z) : \text{matrices diagonales } n_s \times n_s \end{array} \right.$$

Algébriquement, il existe un ensemble de filtres $\mathbf{G}(z)$ qui peuvent être interprétés comme l'inverse d'une matrice de mélange et dont le vecteur de sortie \mathbf{x} peut être vu comme un vecteur de sources. P. Comon [Com94b], D. Yellin et E. Weinstein [YW94] ont montré que rendre les composantes de \mathbf{x} indépendantes (hypothèse \mathcal{H}_2) permet de trouver un filtre qui fournit une reconstruction du vecteur \mathbf{s} . Ce filtre n'est pas unique, il appartient à la classe des filtres séparateurs définie par

$$\mathcal{G} = \{ \mathbf{G}(z), \quad \mathbf{x}(t) = [\mathbf{G}(z)] \mathbf{y}(t) = [\mathbf{P}(z) \mathbf{D}(z)] \mathbf{s}(t) \} \quad (2.15)$$

Les sources sont identifiées aux indéterminations près portées par $\mathbf{G}(z)$, différentes selon le modèle de mélange. Nous détaillerons ces indéterminations au paragraphe 2.5.1 et nous montrerons comment elles peuvent être réduites ou supprimées si l'on dispose de connaissances supplémentaires sur le mélange et/ou sur les signaux ou si l'on impose des conditions.

2.3.3 Séparation en présence de bruit

Après l'identification de $\mathbf{H}^\#(z)$ et la séparation, nous obtenons le vecteur $\mathbf{x}(t)$ à n_s composantes. Chaque composante ne contient qu'une seule source additivement bruitée par des composantes de bruits spatialement corrélées. En occultant les matrices $\mathbf{P}(z)$ et $\mathbf{D}(z)$, on obtient :

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{H}^\#(z)] \mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(t) + [\mathbf{H}^\#(z)] \mathbf{b}(t) \quad (2.16)$$

Les composantes du bruit en sortie sont généralement corrélées puisque la matrice de covariance des termes de bruit est égale à $[\mathbf{H}^\#(z)] \mathbf{R}_{\mathbf{bb}} [\mathbf{H}^\#(z)]^+$. Si l'identification de $\mathbf{H}^\#(z)$ est précise mais que le niveau de bruit est trop élevé, on ne pourra profiter de la qualité de

restitution des sources. On peut donc souhaiter effectuer une réduction de bruit, même au prix d'une dégradation des performances de séparation. Deux situations se présentent :

- si on ne dispose pas de références bruit-seul et si $n = n_s$, il faut utiliser les $(n_s - 1)$ sorties restantes pour débruiter chaque sortie. Le traitement détériore la qualité de la séparation puisque l'on re-mélange partiellement les sources pour augmenter le RSB de chaque sortie. Un tel choix est intéressant dans certaines applications. Pour choisir le meilleur compromis entre séparation et débruitage, il faut redéfinir le séparateur en introduisant la notion de Rapport Signal à Bruit plus Interférences. On appelle *interférence pour la source k* toute contribution d'une source l ($l \neq k$) sur la même sortie du séparateur [Che95]. On appelle *Rapport Signal à Bruit plus Interférences* de la source k le rapport entre la puissance de la source k et la somme des puissances des bruits et des autres sources sur la même sortie. Comme les composantes de bruits de $\mathbf{x}(t)$ sont corrélées, on peut améliorer le Rapport Signal à Bruit plus Interférences $RSBI_{s_k}$ pour chaque source k . On appelle séparateur optimal et on note $\mathbf{G}(z)$, l'ensemble des n_s filtres séparateurs qui maximisent le RSBI (SINR en anglais) de chacune des sources estimées. Le séparateur optimal est unique à une matrice diagonale $\mathbf{D}(z)$ et de permutation $\mathbf{P}(z)$ près. Les colonnes du séparateur $\mathbf{G}(z)$ correspondent aux filtres adaptés spatiaux des différentes sources reçues [Che95] :

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{-1} \mathbf{H}(z) \mathbf{D}(z) \mathbf{P}(z) \quad (2.17)$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ est la matrice de covariance des observations. Le filtre adapté spatial (FAS) a été conçu pour un problème de traitement d'antenne dans lequel les colonnes de $\mathbf{H}(z)$ sont déterminées par goniométrie (détermination des phases), par une mesure de puissance reçue dans chaque direction et par des connaissances *a priori* sur l'antenne (détermination des gains). Dans le problème de séparation de signaux, nous n'avons aucune connaissance *a priori* et le séparateur optimal ne peut être calculé sans avoir effectué au préalable la séparation de signaux pour disposer de $\mathbf{H}(z)$.

Notre apport à ce sujet est donné au chapitre 5 où nous montrons que le séparateur optimal est équivalent à une étape de séparation de signaux suivie d'un système de soustraction de bruit multi-références [WGC⁺75] [JGC89]. Le filtre est un filtre de Wiener multidimensionnel classique [Wie49].

- si le nombre de capteurs n est supérieur au nombre de sources n_s , des références bruits seuls sont accessibles. L'opération de réduction de bruit n'introduit pas d'interférences entre les sources estimées. Dans ce cas une première étape de projection sur les sous-espaces signal et bruit (Analyse en Composantes Principales) permet de séparer l'information totale sur les sources de celle sur les bruits. On obtient n_s combinaisons orthogonales des sources perturbées par du bruit et $(n - n_s)$ sorties ne contenant que des combinaisons linéaires des bruits [Mer76]. Une deuxième étape permet d'identifier complètement $\mathbf{H}^\#(z)$ et de séparer les sources dans les n_s premières sorties. Nous avons

alors n_s voies ne contenant qu'une seule source additivement bruitée par des composantes de bruits spatialement corrélées et $(n - n_s)$ voies ne contenant que des bruits. Il est alors possible d'utiliser ces $(n - n_s)$ dernières voies comme références bruit-seul et de débruiter au mieux les n_s premières sorties sans termes d'interférences avec d'autres sources. Le critère utilisé ici est de maximiser la puissance de la source estimée sur chaque voie, vis-à-vis du bruit sur cette sortie. Comme précédemment décrit, il est aussi possible d'augmenter le Rapport Signal à Bruit plus Interférences en utilisant $(n_s - 1)$ sorties "séparées" et $(n - n_s)$ références bruit-seul.

2.4 Les problèmes de séparation et leurs hypothèses

2.4.1 Vue d'ensemble sur les mélanges linéaires

Il existe deux problèmes associés aux mélanges linéaires :

- l'*identification* qui consiste à estimer le filtre matriciel $\mathbf{H}(z)$. Lorsque les entrées sont observées on parle d'*identification entrée-sortie*. Lorsqu'elles ne sont pas observées on parle d'*identification aveugle* (traitement d'antenne ou identification de filtres).
- la *déconvolution* scalaire (mono-capteur) ou vectorielle (multi-capteurs) qui consiste à estimer directement le filtre inverse $\mathbf{H}^\#(z)$. De même on parle de *déconvolution aveugle* lorsque les entrées ne sont pas observées. On remplace alors l'observation des entrées par la connaissance de leur statistique. L'objectif est de retrouver les signaux d'entrée. L'application typique est l'égalisation aveugle en communication.

Le terme général *séparation de signaux* désigne quant à lui un sous-problème de la déconvolution aveugle. Il s'agit d'estimer un filtre $\mathbf{G}(z)$ qui inverse le mélange à quelques indéterminations près, le but essentiel étant de retrouver les signaux avant sommation. On comprend alors que les hypothèses formulées sont moins fortes que pour la déconvolution aveugle. En particulier les ddp des sources ne sont pas connues. Les hypothèses \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_3 qui ont été énoncées au paragraphe 2.3 sont communes à tous les problèmes de séparation. Pour simplifier l'écriture des algorithmes on ajoute \mathcal{H}_4 et pour les *algorithmes blocs* (i.e. non adaptatifs) on ajoute \mathcal{H}_5 et \mathcal{H}_6 .

- \mathcal{H}_4 : les signaux sont centrés,
- \mathcal{H}_5 : les signaux sont stationnaires,
- \mathcal{H}_6 : les signaux sont ergodiques.

On distingue trois sous-problèmes en séparation de signaux :

- la *séparation aveugle de sources (SAS)* qui concerne les mélanges convolutifs et qui n'exploite pas la corrélation ou le spectre des sources (on ne peut pas séparer la signature spectrale du signal de celle des filtres de propagation),
- la *séparation de sources (SS)* qui concerne les mélanges instantanés et qui exploite éventuellement la corrélation ou le spectre des sources
- l'*analyse en composantes indépendantes (ACI)* qui concerne les mélanges instantanés de

variables aléatoires.

Nous allons à présent définir ces différentes situations et les conditions de leur résolution. Nous présenterons ensuite l'approche originale qui a été la nôtre pour résoudre un problème convolutif fortement bruité en exploitant la cohérence temporelle de signaux issus du modèle de sources sinusoïdales.

2.4.2 La séparation aveugle de sources

L'emploi du terme aveugle en séparation de signaux a un sens plus précis que celui qui a été donné pour l'identification et la déconvolution [Com95]. Il désigne un problème qui n'utilise aucune connaissance a priori sur la nature des sources et sur les transferts sources-capteurs. Ceci oblige à considérer que le mélange est convolutif et de ce fait la cohérence temporelle des sources ne peut être exploitée puisque, dans le cadre du mélange convolutif, les sources sont connues à un filtrage près (voir au paragraphe 2.5.1). On utilise à la place de la cohérence temporelle l'information statistique à un ordre supérieur à 2. Cet ordre est au moins égal à 4 pour pouvoir prendre en compte les v.a. dont les cumulants d'ordre 3 sont nuls pour des ddp symétriques. Le problème est soluble sous la condition :

- \mathcal{C}_1 : il y a au plus une source gaussienne

Dans la pratique on utilise rarement des statistiques d'ordre supérieur à 4 et l'on a alors besoin d'une condition pour différencier les sources des bruits à l'ordre 4 :

- \mathcal{C}_2 : les bruits sont gaussiens,
- \mathcal{C}_3 : les bruits sont iid⁷.

2.4.3 La séparation de sources

Ce problème concerne le mélange instantané qui, contrairement au mélange convolutif, ne modifie pas la cohérence temporelle des sources [LAC97] [Com95]. Une condition est toutefois requise pour discriminer les sources :

- \mathcal{C}_1 : les fonctions de corrélation des sources doivent être distinctes.

Les traitements sont réalisés à l'ordre 2. Les sources peuvent être gaussiennes. La plupart des méthodes supposent que le mélange est non bruité. Dans le cas contraire, pour discriminer les sources des bruits à l'ordre 2, on ajoute les conditions suivantes :

- \mathcal{C}_5 : les sources sont modélisées (module constant, signaux de communication...),
- \mathcal{C}_3 : les bruits sont iid,
- \mathcal{C}_4 : les bruits sont spatialement blancs⁸.

⁷Un signal iid est une séquence de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

⁸Cette condition est extrêmement forte : les bruits sont supposés indépendants et de même puissance de capteur à capteur

2.4.4 L'Analyse en Composantes Indépendantes

Dans de nombreuses situations le mélange est instantané mais on ne peut exploiter la cohérence temporelle des sources. C'est le cas lorsque les sources ne sont pas modélisées. On a alors un problème d'analyse de données qui n'exploite pas le fait que des échantillons successifs appartiennent à un même signal. Ce problème est nécessairement résolu aux ordres supérieurs, sous les conditions suivantes :

- \mathcal{C}_1 : il y a au plus une source gaussienne,
- \mathcal{C}_2 : les bruits sont gaussiens,
- \mathcal{C}_3 : les bruits sont iid,
- \mathcal{C}_4 : les bruits sont spatialement blancs.

2.4.5 Notre approche

Nous traitons le problème d'un mélange convolutif de sources modélisées comme des sommes de fréquences pures. Les conditions \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 qui supposent la blancheur temporelle et spatiale des bruits ne sont pas vérifiées. La solution que nous proposons se place dans le domaine fréquentiel pour disposer de mélanges instantanés dans chaque canal fréquentiel et exploite la cohérence temporelle des sources en utilisant des informations à différents retards. Nous supposons que les fonctions de corrélation des sources sont toutes distinctes et que les sources sont des sommes de fréquences pures.

Nous imposons une condition peu restrictive sur les bruits : les supports de corrélation des bruits sont inférieurs à ceux des sources. Dans ces conditions, nous pouvons réaliser la séparation dans des conditions de bruit sévères :

- niveaux de bruit importants,
- bruits non nécessairement iid,
- bruits spatialement corrélés,
- ddp des bruits quelconques.

2.5 Identifiabilité et séparabilité

Les modèles de mélange précédemment décrits par les relations (2.3), (2.4) et (2.6) contiennent des éléments fondamentalement non identifiables et des éléments non identifiables seulement à l'ordre 2 pour certains types de sources [LAC97].

2.5.1 Non identifiabilité intrinsèque

Dans le cas du mélange instantané décrit par (2.4) :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{H}_0 \mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2.18)$$

La forme de cette relation est inchangée si on multiplie une quelconque des composantes du vecteur des sources par une constante, et si l'on divise la colonne correspondante de la matrice de mélange par la même constante. L'amplitude, ou la puissance, des sources est donc non identifiable.

Dans le cas du mélange spectral (équation 2.6),

$$\mathbf{r}^t(f) = \mathbf{H}(f) \mathbf{s}(f) + \mathbf{b}(f), \quad f \in]-N/2 + 1, N/2] \quad (2.19)$$

la constante multiplicative arbitraire est un nombre complexe qui modifie l'amplitude et la phase des sources. Comme on a un gain complexe à chaque canal traité on ne peut restituer les sources qu'à un filtrage près.

Par ailleurs les modèles instantané (équation 2.4), spectral (équation 2.6) ou convolutif (équation 2.3) sont inchangés si l'on permute l'ordre des sources et des colonnes correspondantes de $\mathbf{H}(z)$. Il y a donc une indétermination intrinsèque sur l'ordre des sources estimées.

2.5.2 Non identifiabilité à l'ordre deux

Les techniques classiques (Analyse en Composantes Principales) cherchent à identifier la matrice (ou les filtres) de mélange en utilisant la matrice de covariance pour le retard 0 ou la matrice spectrale des observations. Calculons par exemple la matrice spectrale d'un mélange spectral non bruité.

Considérons le mélange spectral au canal f . Dans la suite de l'exposé, nous omettons la notation fréquentielle (f).

$$\mathbf{r}^t = \mathbf{H} \mathbf{s}^t$$

Pour lever l'indétermination sur la puissance des sources, nous reportons celles-ci dans la matrice de mélange \mathbf{H} , de sorte que la matrice spectrale des sources est :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ss}} = \mathbb{E} \left[\mathbf{s}^t \mathbf{s}^{t+} \right] = \mathbf{I}_{n_s}$$

La matrice spectrale des observations $\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}$ est définie par :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}} = \mathbb{E} \left[\mathbf{r}^t \mathbf{r}^{t+} \right]$$

où $()^+$ désigne le transposé-conjugué. En raison de la normalisation des sources, elle s'écrit en fonction de la matrice de mélange des sources \mathbf{H} :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}} = \mathbf{H} \mathbf{H}^+$$

La matrice \mathbf{H} , comme toute matrice rectangulaire, admet une décomposition en valeurs singulières [GL83, p 16] de la forme

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\Delta^{1/2}\Pi, \quad (2.20)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} & : \text{matrice unitaire de dimension } n \times n \\ \Delta^{1/2} & : \text{matrice diagonale de dimension } n \times n_s \\ \Pi & : \text{matrice unitaire de dimension } n_s \times n_s \end{aligned}$$

Dans le cas où le nombre de capteurs est supérieur au nombre de sources, la matrice diagonale possède une forme particulière : ses $(n - n_s)$ dernières lignes ne possèdent que des zéros. Les autres lignes contiennent les valeurs singulières rangées par valeurs décroissantes. Ici, \mathbf{H} est supposée de rang plein dans les colonnes. Les valeurs singulières sont toujours strictement positives (par construction) :

$$\Delta^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\lambda_{n_s}} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n_s} > 0.$$

Dans la décomposition en valeurs singulières (DVS) de \mathbf{H} , les $(n - n_s)$ dernières colonnes de \mathbf{U} sont indéterminées. La seule contrainte est que ces $(n - n_s)$ dernières colonnes de \mathbf{U} soient normalisées, qu'elles soient orthogonales aux n_s premières colonnes et orthogonales entre elles puisque la matrice \mathbf{U} est unitaire. Identifier \mathbf{H} revient alors à identifier les (n_s) premières colonnes de \mathbf{U} ainsi que les matrices $\Delta^{1/2}$ et Π .

En introduisant la décomposition en valeurs singulières (DVS) de \mathbf{H} dans l'expression de la matrice spectrale des observations, on obtient la décomposition en valeurs propres (DVP) de la matrice spectrale $\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}} = \mathbf{U}\Delta\mathbf{U}^+ \quad (2.21)$$

\mathbf{U} représente la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}$ et $\Delta = \Delta^{1/2} \cdot (\Delta^{1/2})^T$ la matrice des valeurs propres. L'écriture (2.21) peut se réduire sous la forme (2.22) où l'on conserve dans \mathbf{V} uniquement les n_s premières colonnes de \mathbf{U} et dans Λ uniquement les n_s premières lignes et colonnes de Δ .

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^+ \quad \text{avec } \begin{cases} \mathbf{V} \text{ de taille } n \times n_s \\ \Lambda \text{ de taille } n_s \times n_s \end{cases} \quad (2.22)$$

En effet, la Décomposition en Valeurs Propres (DVP) de la matrice interspectrale des observations se met sous la forme (2.23) où \mathbf{V}^\perp de taille $n \times (n - n_s)$ est une base du sous-espace orthogonal complémentaire à \mathbf{V} .

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}} = \mathbf{U}\Delta\mathbf{U}^+ = [\mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp] \Delta \begin{bmatrix} \mathbf{V}^+ \\ \mathbf{V}_\perp^+ \end{bmatrix} \quad \text{avec } \Delta = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Nous voyons avec cette écriture que les seuls éléments identifiables de la matrice de mélange à partir de \mathbf{R}_{rr} sont \mathbf{V} et Λ . Pour obtenir \mathbf{H} il reste une matrice unitaire Π de dimension $n_s \times n_s$ à identifier. La matrice de mélange n'est pas identifiable à l'ordre 2 en utilisant seulement la matrice de covariance au retard nul pour le mélange instantané ou la matrice spectrale pour le mélange spectral. Dans ce dernier cas l'indétermination existe à chaque canal fréquentiel f . Ceci implique qu'à l'ordre deux, les sources mélangées convolutivement ne peuvent être déterminées qu'à un filtre matriciel près $\Pi(t)$. Si les sources sont temporellement corrélées et de fonctions de corrélation différentes, nous verrons dans le chapitre 3 qu'il est possible d'identifier totalement \mathbf{H} à partir de matrices de covariance pour plusieurs retards.

La détermination de la matrice \mathbf{H} ne permet pas de retrouver les sources telles qu'elles étaient avant le mélange, mais au mieux de retrouver les signaux vus par les capteurs avant sommation. C'est le problème des indéterminations que nous allons exposer maintenant. Nous verrons que chaque modèle de mélange possède ses propres indéterminations.

2.5.3 Indéterminations du modèle convolutif

Pour chacun des modèles les indéterminations sont la conséquence de la non identifiabilité intrinsèque. Dans le cadre du mélange convolutif, l'équation (2.1) peut être remplacée par

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^{n_s} (h'_{ik} * s'_k)(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h'_{ik}(t) = (h_{ik} * g_k)(t) \\ s'_k(t) = (g_k^{-1} * s_k)(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

où $g_k(t)$ est un filtre causal inversible et inversement causal et $g_k^{-1}(t)$ est son inverse. Les sources indépendantes sont donc déterminées à un FLH près. Il existe toute une famille de couples (h'_{ik}, s'_k) pouvant être solution de l'équation (2.1). Pour lever partiellement l'indétermination, on impose une contrainte. On recherche souvent des sources normalisées en puissance. Les sources sont alors déterminées à un filtre près de puissance égale à l'unité. Lorsque le nombre de capteurs est égal au nombre de sources, une autre contrainte couramment utilisée impose pour chaque composante $y_i(t)$, un filtre $h'_{ik}(t)$ égal à l'impulsion de Dirac $\delta(t)$. Physiquement, ceci signifie que chaque capteur a été placé près d'une source qu'il reçoit directement tandis qu'il reçoit des filtrées des autres sources. Après séparation, une intercorrélacion entre les estimées et les capteurs suivie d'une comparaison des niveaux d'énergie permet de retrouver les sources brutes.

2.5.4 Indéterminations du modèle instantané

Dans le cadre du mélange instantané (2.4) les sources ne sont déterminées qu'à un gain et une permutation près. En effet, si $\mathbf{H}_0^\#$ de taille $(n_s \times n)$ est la pseudo-inverse de la matrice de mélange, si \mathbf{P} est une matrice de permutation $(n_s \times n_s)$ et \mathbf{D} une matrice diagonale $(n_s \times n_s)$ de gains réels positifs, alors toutes les matrices de la forme $\mathbf{G} = \mathbf{PDH}_0^\#$ sont des matrices séparantes. Les composantes du vecteur $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{PD}\mathbf{s}$ sont indépendantes. Il existe donc toute une famille "virtuelle" de sources. Pour résoudre le problème, on impose généralement

une contrainte supplémentaire. On recherche souvent des sources normalisées en écrivant le mélange sous la forme :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{H}'\mathbf{s}'(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{H}' = \mathbf{H}_0 \mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^{1/2} \\ \mathbf{s}'(t) = \mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^{-1/2} \mathbf{s}(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

Comme pour les mélanges convolutifs, si le nombre de capteurs est égal au nombre de sources, une autre contrainte couramment utilisée impose la diagonale de la matrice recherchée égale à 1. Physiquement, ceci signifie que chaque capteur a été placé près d'une source qu'il reçoit directement.

2.5.5 Indéterminations du modèle spectral

Dans le cas du modèle spectral, les sources sont déterminées à un gain complexe et à une permutation près, ceci pour chaque fréquence. Ceci modifie à la fois l'amplitude et la phase des sources. Comme précédemment, nous pouvons imposer une normalisation de la puissance des sources recherchées. On obtient donc un spectre normalisé à toutes les fréquences. Il s'agit d'un spectre générique. On peut retrouver le spectre des sources vues sur un capteur particulier en réalisant une opération d'intercorrélacion entre la source estimée normalisée et un capteur particulier [Cap95, p35]. Par contre, la permutation éventuelle d'une fréquence à l'autre est très gênante. Des méthodes ont cependant été développées pour réassocier les composantes spectrales d'une même source [Cap95, p35] [WP99].

2.5.6 Conclusion

Les techniques de séparation de sources ne permettent pas de retrouver les sources telles qu'elles étaient avant le mélange, mais au mieux de retrouver les signaux vus par les capteurs avant sommation.

2.6 Mesure de l'acuité de la séparation

La mesure des performances des séparateurs ne peut s'effectuer qu'en simulation. On distingue le cas non bruité où l'efficacité de la séparation est totalement liée à l'identification de la matrice de mélange $\mathbf{H}(z)$ et le cas bruité où la qualité de la restitution d'une source est directement liée au rapport Signal à Bruit ou Signal à bruit plus Interférences après séparation [Che95].

Dans le cas non bruité, on définit le taux de réjection I_{kq} [Car96] comme étant la puissance relative de la q -ème source dans l'estimée de la k -ème source. Prenons le modèle d'un mélange instantané. Dans le cas où l'on ajoute une contrainte de sources normalisées, le taux de réjection se calcule en fonction de la matrice de mélange \mathbf{H} et du séparateur \mathbf{G} . Le séparateur optimal estimé est égal soit à l'inverse de \mathbf{H} , \mathbf{H}^{-1} (pour $n = n_s$), soit à la pseudo-inverse de \mathbf{H} , $\mathbf{H}^\#$ (pour $n > n_s$). Le système global $\mathbf{Z} = \mathbf{G}\mathbf{H}$ est théoriquement une matrice identité à

une permutation signée près. Le Taux de Réjection de la q -ème source dans l'estimée de la k -ème s'écrit en fonction du système global (2.26) après correction des permutations :

$$I_{kq} = \frac{|\mathbf{Z}_{kq}|^2}{|\mathbf{Z}_{kk}|^2} \quad (2.26)$$

On définit aussi la diaphonie résiduelle (en dB) [Jut96] pour une source k qui est l'opposée du Rapport Signal à Interférences :

$$D_k = -10 \log\left(\frac{\sum_{q \neq k} |\mathbf{Z}_{kq}|^2}{|\mathbf{Z}_{kk}|^2}\right) \quad (2.27)$$

Le Taux de Réjection I_{kq} (2.26) se définit entre deux sources q et k , contrairement au rapport Signal à Interférences où le dénominateur est égal à la somme des puissances de toutes les interférences dans la sortie courante ($q \neq k$).

Dans le cas bruité, nous avons donné au paragraphe 2.3.3 la définition du Rapport Signal à Bruit plus Interférences utilisé pour quantifier les performances du séparateur [Che95].

2.7 Conclusion

L'objectif de la séparation de signaux est de déterminer un séparateur qui consiste soit en une matrice séparante (mélange instantané temporel) soit en une série de matrice séparantes (mélange spectral) soit en un ensemble de filtres linéaires et homogènes (mélange convolutif). Nous avons présenté le modèle spectral qui semble le mieux adapté au type de signaux que nous souhaitons traiter (signaux de machines tournantes) puisque leur dynamique spectrale est très importante. Il faut cependant nuancer le propos en précisant les contraintes que ce choix impose. En effet il faut estimer le nombre de sources et les séparer dans chaque canal de fréquence puis corriger les permutations sur l'ensemble des canaux. Nous devons en particulier développer un estimateur du nombre de composantes-sources dans un canal de fréquence. Comme nous n'imposons pas, pour des raisons pratiques, la blancheur temporelle et spatiale des bruits cet estimateur doit être insensible à la corrélation spatiale des bruits. Nous voulons aussi définir une méthode de séparation de sources efficace sur des signaux fortement bruités, avec des bruits non spatialement blancs contrairement à l'hypothèse classique. Enfin, nous avons indiqué qu'au chapitre 5 nous démontrerons que le séparateur optimal peut se formuler par une étape de séparation suivie d'une étape de réduction de bruit.

Chapitre 3

Panorama des techniques de séparation de signaux

3.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre un panorama des principales techniques de séparation de signaux. La plupart traitent le cas du mélange instantané, le problème convolutif pouvant être remplacé par une succession de problèmes instantanés fréquentiels. Nous exposons les principes généraux aboutissant aux algorithmes de séparation.

Nous abordons d'abord les techniques dites orthogonales qui découpent le problème en deux parties : blanchiment par Analyse en Composantes Principales (ACP) (projection sur le sous-espace signal) puis estimation d'une transformation unitaire (recherche de la base initiale). Nous faisons un rappel sur l'ACP au paragraphe 3.3 pour montrer ses limitations et son manque de robustesse aux hypothèses. Ceci explique la fragilité des techniques orthogonales en contexte bruité. Nous verrons dans les chapitres suivants comment remédier à ces inconvénients pour des sources temporellement corrélées. Les algorithmes de séparation que nous présentons ensuite permettent tous de réaliser la seconde étape des techniques orthogonales. Certains d'entre eux sont néanmoins capables de réaliser la séparation directement sans prétraitement par ACP. Il a été montré [Com94b] que la résolution du problème de séparation est équivalente à l'inversion du système observé, sous la contrainte que les sources estimées sont les plus indépendantes possibles, ce qui revient à un problème d'analyse en Composantes Indépendantes ou ACI (paragraphe 3.4). L'hypothèse de sources indépendantes est alors nécessaire. La matrice de mélange est identifiée en maximisant une fonction de contraste qui mesure l'indépendance entre les sources estimées. Nous rappelons dans ce même paragraphe quelques mesures d'indépendance et fonctions de contraste classiques utilisant les ddp ou les statistiques d'ordre supérieur (SOS). Nous indiquons au paragraphe 3.5 que si les sources sont temporellement corrélées, les statistiques d'ordre 2 suffisent pour réaliser la séparation en exploitant l'information à différents retards. Nous consacrons un paragraphe aux techniques qui traitent directement le mélange convolutif en temps (paragraphe 3.6). Le cas des mélanges bruités est discuté au paragraphe 3.7. Enfin, nous présenterons au paragraphe 3.8 la méthode

qui nous semble la mieux adaptée au traitement de signaux vibratoires et que nous allons développer dans les chapitres suivants.

3.2 Les techniques orthogonales

Ces techniques exploitent les notions de sous-espace signal et sous-espace bruit qui ont été introduites par Mermoz dans le problème du traitement d'antenne [Mer76]. Ces méthodes ont ensuite été reprises en séparation de sources où le réseau de capteur a une géométrie quelconque. Le cadre de travail est celui d'un mélange instantané au canal fréquentiel f . La TFD du vecteur d'observation $\mathbf{r}(t)$ obtenue entre les instants t et $t + N - 1$ est notée $\mathbf{r}^t(f)$. Pour simplifier, nous omettons la notation f :

$$\mathbf{r}^t = \mathbf{H}\mathbf{s}^t + \mathbf{b}^t = \mathbf{y}^t + \mathbf{b}^t \quad (3.1)$$

On note n le nombre de capteurs et c le nombre de sources présentes au canal f . Pour lever l'indétermination sur la puissance des sources, il est toujours possible de reporter la puissance des sources dans la matrice de mélange \mathbf{H} , de sorte que la matrice spectrale des sources soit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ss}} = \mathbf{I}_c$$

La matrice \mathbf{H} supposée de rang c admet pour DVS :

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}\Lambda^{1/2}\Pi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{V} : \text{unitaire à gauche } n \times c \\ \Pi : \text{unitaire } c \times c \\ \Lambda^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_c}) \end{cases}$$

La séparation de sources consistant à déterminer la pseudo-inverse $\mathbf{H}^\# = \Pi^+\Lambda^{-1/2}\mathbf{V}^+$ est réalisée en deux étapes.

3.2.1 Première étape : l'Analyse en Composantes Principales (ACP)

Elle consiste en un blanchiment à l'ordre deux de la partie utile des signaux :

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{W}\mathbf{r}^t \quad \text{avec} \quad \mathbf{W} = \Lambda^{-1/2}\mathbf{V}^+ \quad (3.2)$$

Dans le cas bruité, nous verrons au paragraphe 3.3.1 que l'estimation de \mathbf{W} nécessite soit l'hypothèse de blancheur spatiale des bruits, soit la connaissance de la matrice spectrale des bruits. L'ACP n'est pas robuste à des perturbations sur ces hypothèses.

3.2.2 Seconde étape : Transformation Unitaire

Elle consiste à estimer la matrice unitaire Π^+ à partir des observations blanchies \mathbf{x}^t . D'une manière générale ce sont les SOS qui permettent d'obtenir les équations supplémentaires pour résoudre le problème. Cependant si la dimension de \mathbf{x}^t a été sur-estimée, une ou plusieurs composantes ne contiennent que du bruit, ce qui va perturber les estimateurs, surtout lorsque le bruit est non gaussien. Lorsque la dimension de \mathbf{x}^t notée \hat{c} a été sous-estimée, $(c - \hat{c})$ sources perturbent les \hat{c} estimées. Cette seconde étape fera l'objet du paragraphe 3.4.

3.3 L'Analyse en Composantes Principales et ses limites

3.3.1 Hypothèses classiques : bruits spatialement blancs

- Le nombre de capteur est supérieur au nombre de sources : $n > c$
- Les bruits sont spatialement blancs : $\mathbf{R}_{\mathbf{bb}} = \sigma_b^2 \cdot \mathbf{I}_{n_b}$ avec $n_b = n$
- Les signaux sont mutuellement décorrélés.

En raison de la décorrélation des signaux, les composantes des vecteurs \mathbf{s}^t et \mathbf{b}^t engendrent un espace vectoriel \mathcal{E} de variables aléatoires de dimension $(c + n)$. Cet espace est scindé en deux sous-espaces orthogonaux :

- le sous-espace signal \mathcal{E}_s de dimension c , engendré par la base orthogonale que constituent les composantes de \mathbf{s}^t ,
- le sous-espace bruit \mathcal{E}_b de dimension n , engendré par la base orthogonale que constituent les composantes de \mathbf{b}^t .

Les composantes du mélange $\mathbf{y}^t = \mathbf{H}\mathbf{s}^t$ engendrent aussi \mathcal{E}_s et l'on note \mathbf{V} la base orthogonale du sous-espace signal qui représente les dimensions principales d'énergie de \mathbf{y}^t . Les n observations portées par le vecteur \mathbf{r}^t sont dans un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} de dimension n noté \mathcal{E}_{obs} . La séparation de sources vise à déterminer dans l'espace \mathcal{E}_{obs} la base orthogonale $\hat{\mathbf{V}}$ de dimension c la plus "proche" de \mathbf{V} . Nous allons voir que lorsque le bruit est spatialement blanc il est possible d'obtenir algébriquement $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}$ mais ces matrices sont exprimées dans des bases canoniques de deux espaces distincts. Les sorties du filtre blanchisseur seront toujours bruitées car la projection $\hat{\mathbf{V}}^+$ est appliqué dans l'espace \mathcal{E}_{obs} et non dans l'espace \mathcal{E} . Il est donc abusif d'employer l'expression "projection sur le sous-espace signal".

En théorie, les éléments permettant de construire la matrice de blanchiment \mathbf{W} de taille $(c \times n)$ sont issus de la Décomposition en Valeurs Propres (DVP) de la matrice spectrale de \mathbf{y}^t (mélange non bruité) :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{yy}} = \mathbb{E} \left[\mathbf{y}^t \mathbf{y}^{t+} \right] = [\mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp] \Delta \begin{bmatrix} \mathbf{V}^+ \\ \mathbf{V}_\perp^+ \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Les vecteurs colonnes de la matrice \mathbf{V} de taille $(n \times c)$ forment une base orthonormée du sous-espace signal. Ceux de \mathbf{V}_\perp de taille $n \times (n - c)$ sont une base du sous-espace orthogonal complémentaire.

Le problème consiste donc à estimer \mathbf{V} et Λ à partir des observations bruitées et plus précisément à partir de la matrice spectrale des observations bruitées $\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}$, définie par :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}} = \mathbb{E} \left[\mathbf{r}^t \cdot (\mathbf{r}^t)^+ \right] \quad (3.4)$$

où $()^+$ désigne le transposé-conjugué.

Les bruits étant centrés et décorrélés des sources, celle-ci s'écrit aussi :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}} = \mathbf{R}_{\mathbf{yy}} + \mathbf{R}_{\mathbf{bb}}, \quad (3.5)$$

Reformulons $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ en fonction de la DVS de \mathbf{H} :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}} = [\mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp] \Delta \begin{bmatrix} \mathbf{V}^+ \\ \mathbf{V}_\perp^+ \end{bmatrix} + \mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}, \quad (3.6)$$

Dans le cas bruité, nous voyons qu'il est nécessaire de faire des hypothèses sur les statistiques des bruits additifs. Sans connaissance sur $\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$, l'hypothèse la plus courante est de considérer les bruits spatialement blancs. Cette hypothèse est souvent physiquement plausible, en particulier lorsque $\mathbf{b}(t)$ représente le bruit électronique d'un réseau de capteurs identiques ou le bruit de quantification de la chaîne d'acquisition.

En supposant que les bruits sont spatialement blancs :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}} = \sigma_b^2 \mathbf{I}_n \text{ où } \mathbf{I}_n \text{ est l'identité de rang } n$$

Puisque la matrice $[\mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp]$ est unitaire, la matrice spectrale des bruits $\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$ se met sous la forme suivante :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}} = [\mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp] \begin{bmatrix} \sigma_b^2 \mathbf{I}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_b^2 \mathbf{I}_{n-c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^+ \\ \mathbf{V}_\perp^+ \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Sous cette hypothèse la DVP de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ se factorise et s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}} = [\mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp] \begin{bmatrix} \Lambda + \sigma_b^2 \mathbf{I}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_b^2 \mathbf{I}_{n-c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^+ \\ \mathbf{V}_\perp^+ \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

où \mathbf{V}_\perp^+ est une base du sous-espace complémentaire orthogonal au sous-espace engendré par \mathbf{V} , dans l'espace des matrices ($n \times n$). Si le nombre de sources est connu, nous identifions ainsi correctement la matrice des vecteurs propres \mathbf{V} ainsi que la matrice des valeurs propres Λ , après soustraction des ($n - c$) dernières valeurs propres qui sont égales à la puissance du bruit. Nous calculons ainsi la matrice de blanchiment exacte :

$$\mathbf{W} = \Lambda^{-1/2} \mathbf{V}^+ \quad (3.9)$$

3.3.2 Blanchiment des observations par ACP

L'intérêt de cette première étape de blanchiment est d'augmenter le rapport signal à bruit en gardant après blanchiment toute l'information sur les c sources dans c observations (projection des observations \mathbf{r}^t sur le sous-espace signal et normalisation par $\Lambda^{-1/2}$). On montre que la projection de \mathbf{r}^t sur l'espace complémentaire ($\mathbf{V}_\perp^+ \mathbf{r}^t$), noté \mathbf{x}_\perp^t , ne contient que des combinaisons des bruits :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t &= \mathbf{\Pi} \mathbf{s}^t + \mathbf{W} \mathbf{b}^t \\ \mathbf{x}_\perp^t &= \underbrace{\mathbf{V}_\perp^+ \mathbf{V} \Lambda^{1/2}}_{\mathbf{0}} \mathbf{\Pi} \mathbf{s}^t + \mathbf{V}_\perp^+ \mathbf{b}^t = \mathbf{V}_\perp^+ \mathbf{b}^t \end{aligned}$$

Définissons le RSB global en sortie du séparateur, à l'aide de la dsp $R_{s_k}[x_i]$ de chaque source k vue sur chaque sortie i et de $R_{b_l}[x_m]$ qui est la dsp de chaque bruit l sur chaque sortie m :

$$RSB_{global} = \frac{\sum_i \sum_k R_{s_k}[x_i]}{\sum_m \sum_l R_{b_l}[x_m]}$$

Parmi les opérations de filtrage qui conservent toutes les sources, l'ACP est celle qui fournit le meilleur RSB_{global} car on a regroupé tout le signal utile sur les c premières composantes de \mathbf{x}^t à une matrice unitaire près et l'on a que du bruit sur les $(n - c)$ sorties restantes. En effet, après blanchiment par ACP on a :

$$\mathbf{x}^t = \Pi \mathbf{s}^t + \Lambda^{-1/2} \mathbf{V}^+ \mathbf{b}^t$$

La matrice de covariance de \mathbf{x}^t de taille $(c \times c)$ est égale à :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{I}_c + \sigma_b^2 \Lambda^{-1}$$

donc après ACP le RSB_{global} vaut :

$$RSB_{global} = \frac{c}{\sigma_b^2 \sum_{k=1}^c \frac{1}{\lambda_k}}$$

Ce rapport signal à bruit est maximal car, si on considère une observation supplémentaire dans \mathbf{x}_{\perp}^t , le numérateur du RSB_{global} sera inchangé tandis que le dénominateur sera augmenté. Le RSB_{global} de ces $(c + 1)$ observations sera donc plus faible.

L'avantage de l'ACP en séparation de sources réside donc dans l'amélioration du RSB_{global} et dans la réduction du nombre de données. Après ACP, il reste c voies :

$$\mathbf{x}^t = \Pi \mathbf{s}^t + \mathbf{W} \mathbf{b}^t$$

Le RSB_{global} étant augmenté, nous nous rapprochons du cas non bruité si le RSB des observations \mathbf{r}^t était déjà important. Cette hypothèse est souvent faite et on suppose alors être dans le cas non bruité pour calculer la matrice unitaire Π restante ([GL90], [Com94b]) :

$$\mathbf{x}^t \cong \Pi \mathbf{s}^t$$

Rigoureusement, l'ACP ne peut pas débruiter totalement les observations \mathbf{r}^t puisque la matrice spectrale des bruits $\mathbf{W} \mathbf{R}_{\mathbf{bb}} \mathbf{W}^+$ n'est jamais nulle.

Si le nombre de sources est sous estimé ($\hat{c} < c$) alors la puissance du bruit est sur-estimée car elle prend en compte la puissance d'une source ($\widehat{\sigma_b^2}$ est obtenu par la moyenne des $(n - \hat{c})$ dernières valeurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}$). De ce fait les valeurs propres estimées de $\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}$ (obtenue en retranchant $\widehat{\sigma_b^2}$ aux valeurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}$) sont erronées. Les vecteurs propres qui leur sont associés ne seront plus dans le dit "sous-espace signal" de \mathcal{E}_{obs} et les \hat{c} sorties sont plus

fortement bruitées qu'elles ne le sont au sein de l'ACP à c sorties. Le RSB_{global} de ces sorties sera aussi inférieur à celui des \hat{c} sorties correspondantes pour une ACP avec le bon nombre de sources. En revanche si l'on ne prend pas en compte la $(\hat{c} + 1)$ ème valeur propre pour l'estimation de $\widehat{\sigma_b^2}$ alors on a le même RSB_{global} sur les \hat{c} sorties des deux ACP.

3.3.3 Cas de bruits spatialement corrélés

Sous l'hypothèse de bruits non spatialement blancs, la matrice spectrale des bruits \mathbf{R}_{bb} ne se factorise plus et ne s'écrit plus en fonction des vecteurs propres $[\mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp]$:

$$\mathbf{R}_{bb} \neq \begin{bmatrix} \mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_b^2 \mathbf{I}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_b^2 \mathbf{I}_{n-c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^+ \\ \mathbf{V}_\perp^+ \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Il est alors impossible de calculer la matrice de blanchiment à partir de la DVP de \mathbf{R}_{rr} . L'erreur affecte à la fois les valeurs propres et les vecteurs propres et dépend de l'écart de \mathbf{R}_{bb} à une matrice proportionnelle à la matrice identité.

Supposons que les n composantes du vecteur de bruit \mathbf{b}^t résultent du mélange par une matrice \mathbf{L} de taille $(n \times n_b)$ de n_b bruits indépendants regroupés dans le vecteur \mathbf{n}^t :

$$\mathbf{r}^t = \mathbf{y}^t + \mathbf{b}^t = \mathbf{H}\mathbf{s}^t + \mathbf{L}\mathbf{n}^t$$

Si $n_b \leq (n - c)$ il est théoriquement possible de supprimer totalement l'influence du bruit en réalisant des combinaisons linéaires ($\mathbf{L}^\#$ pseudo-inverse de \mathbf{L}) des observations sur $(n - n_b)$ composantes :

$$\mathbf{z}^t = \mathbf{L}^\# \mathbf{H}\mathbf{s}^t + \begin{bmatrix} \mathbf{n}^t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

puis en utilisant ces composantes pour faire la séparation de sources. Pour cela il faut connaître ou estimer n_b , et surtout connaître \mathbf{R}_{bb} . Cette méthode est généralement impossible à appliquer en pratique. On choisira plutôt de réaliser d'abord l'opération de séparation de sources :

$$\mathbf{z}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{s}^t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{H}^\# \mathbf{L}\mathbf{n}^t$$

et combiner les $(n - c)$ composantes de bruit seul pour supprimer l'influence du bruit sur les c composantes sources (cf. 2.3.3 et chapitre 5).

3.3.4 Conclusions sur l'ACP

Les techniques orthogonales possèdent deux points névralgiques. D'une part elles manquent de robustesse aux hypothèses sur la blancheur spatiale des bruits et d'autre part elles nécessitent la connaissance précise du nombre de sources. Partant de ces constatations nous proposons dans la seconde partie de ce manuscrit une technique orthogonale adaptée à nos signaux, qui autorise la présence des bruits spatialement corrélés de forte puissance et qui n'utilise pas de statistiques d'ordre supérieur. Le problème de l'estimation du nombre de sources est aussi revu dans ce cadre particulier.

3.4 Analyse en Composantes Indépendantes

L'Analyse en Composante Indépendantes (ACI) a été introduite par C. Jutten dans sa thèse [Jut87] puis repris par P. Comon [Com94b] [Com95]. L'ACI peut être comprise comme une technique générale d'analyse de données. Elle permet de décomposer un vecteur aléatoire \mathbf{x} de dimension n en une somme de n composantes "les plus indépendantes possibles", par opposition à l'ACP qui décompose \mathbf{x} en une somme de n composantes décorréelées et orthogonales (i.e. issues d'un mélange orthogonal de v.a. indépendantes).

3.4.1 Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle de variables aléatoires

Nous rappelons dans ce paragraphe les définitions de l'indépendance mutuelle de v.a. et de l'indépendance deux à deux de v.a.

Définition 3.1 :

Les variables aléatoires x_1, \dots, x_n sont dites *mutuellement indépendantes* si leur ddp conjointe est égale au produit des ddp marginales :

$$p_{x_1, \dots, x_n}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n p_{x_i}(u_i) \quad (3.11)$$

Définition 3.2 :

Elles sont *deux à deux indépendantes* si $\forall i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ avec $i_1 \neq i_2$ on a :

$$p_{x_{i_1}, x_{i_2}}(u_1, u_2) = p_{x_{i_1}}(u_1) p_{x_{i_2}}(u_2) \quad (3.12)$$

Propriété 3.1 :

L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, tandis que la réciproque n'est pas vérifiée en général.

3.4.2 Traitement du modèle instantané

Reprenons le problème de séparation de sources en considérant le modèle instantané après blanchiment par ACP. Supposons que la projection sur le sous-espace signal a suffisamment augmenté le rapport signal à bruit de façon à ce que le bruit soit négligeable. Le modèle devient :

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{\Pi} \mathbf{s}^t \quad (3.13)$$

On a alors un mélange de c sources centrées et de variance unité, observées sur c capteurs. La matrice $\mathbf{\Pi}$ est unitaire de taille $(c \times c)$. L'objet de la séparation de sources est de déterminer une matrice séparante \mathbf{G} de taille $(c \times c)$ telle que le signal $\mathbf{a}^t = \mathbf{G} \mathbf{x}^t$ soit égal à \mathbf{s}^t aux indéterminations près caractérisées par une matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$ et une matrice de permutation \mathbf{P} . Pour cela, P.Comon [Com94b] a établi qu'il suffisait de rendre les composantes de \mathbf{a}^t statistiquement indépendantes.

Théorème 3.1 :

Soit \mathbf{s} un vecteur de n v.a. s_i , non gaussiennes et indépendantes (mutuellement ou deux à deux). Soit \mathbf{x} un vecteur de dimension n , tel que : $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{s}$ et \mathbf{C} une matrice non singulière de dimension $(n \times n)$, les deux conditions sont équivalentes :

- les composantes x_i sont indépendantes deux à deux,
- la matrice \mathbf{C} est un produit $\Lambda\mathbf{P}$ où Λ est une matrice diagonale et \mathbf{P} une matrice de permutation.

On voit donc que le problème de séparation de signaux consiste à estimer la matrice \mathbf{G} de telle sorte que les composantes de \mathbf{a}^t soient les plus “proches” possibles de variables aléatoires indépendantes deux à deux. Cette technique, dénommée ACI, consiste donc à ajuster les coefficients du filtre matriciel \mathbf{G} à partir d’une mesure du degré d’indépendance entre les sorties de ce filtre. L’hypothèse de sources statistiquement indépendantes est indispensable pour pouvoir résoudre le problème aveugle. La matrice \mathbf{G} peut être obtenue en maximisant une fonction de contraste adaptée au problème, comme dans le cadre de la déconvolution aveugle [Don81]. P.Comon a proposé la définition suivante des fonctions de contraste :

Définition 3.3 :

Soit \mathcal{S} un ensemble de vecteurs aléatoires à composantes non gaussiennes. On dit qu’une fonction Φ définie sur \mathcal{S} est une fonction de contraste si :

- $\forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}$, $\Phi(\mathbf{s})$ ne dépend que de la ddp de \mathbf{s} ,
- $\forall \mathbf{s} \in \mathcal{S}$ dont les composantes sont statistiquement indépendantes (mutuellement ou deux à deux), et pour toute matrice \mathbf{H} pour laquelle $\mathbf{H}\mathbf{s} \in \mathcal{S}$, on a l’inégalité $\Phi(\mathbf{H}\mathbf{s}) \leq \Phi(\mathbf{s})$. L’égalité n’a lieu que si la matrice \mathbf{H} est diagonale à une permutation près.

3.4.3 Les mesures d’indépendance

Lorsque l’on observe des combinaisons linéaires des signaux on peut utiliser des mesures d’indépendance entre variables aléatoires pour retrouver les contributions de chaque signal. Nous exposerons successivement les fonctions de contrastes basées sur une mesure directe (information mutuelle et infomax [Com95] [Car98a] [BS95]) ou une mesure indirecte (moments, cumulants) ([RL89], [Car90] [CS93] [Com90] [Com94b] [GL90]). Les mesures directes sont difficiles à mettre en oeuvre en aveugle puisqu’elles utilisent de façon explicite les ddp conjointes et marginales des signaux ou leurs fonctions de répartitions. Les mesures indirectes ne mesurent qu’une indépendance partielle des v.a., souvent limitée à l’ordre 4. Ce sont les premières fonctions de contraste qui ont été construites ([RL89], [Car90] [CS93] [Com90] [Com94b] [GL90]). Les mesures indirectes supposent que l’on dispose d’un grand nombre de réalisations pour estimer les statistiques des signaux. Quelle que soit la mesure d’indépendance retenue il est nécessaire d’estimer soit des ddp soit des moments ou des cumulants à partir d’une seule observation des signaux de mélange. On évoque alors la stationnarité et l’ergodisme pour remplacer les moyennes d’ensemble par des moyennes temporelles.

Les mesures directes

On montre dans [Com95] que l'opposé de l'information mutuelle est une fonction de contraste sur l'ensemble des vecteurs aléatoires de covariance finie et inversible. De plus, il est discriminant sur le sous-ensemble des vecteurs aléatoires ayant au plus une composante gaussienne.

Définition 3.4 de l'information mutuelle $I(\mathbf{s})$:

$$-I(\mathbf{s}) = - \int p_{\mathbf{s}}(\mathbf{u}) \ln \frac{p_{\mathbf{s}}(\mathbf{u})}{\prod_{i=1}^n p_{s_i}(u_i)} d\mathbf{u} \quad (3.14)$$

L'information mutuelle est égale à la divergence de Kullback entre $p_{\mathbf{s}}(\mathbf{u})$ et la loi de $p_{\mathbf{s}}(\mathbf{u})$ lorsque ses composantes sont indépendantes, soit $\prod_{i=1}^n p_{s_i}(u_i)$. Par conséquent $I(\mathbf{s})$ est toujours positive ou nulle. Elle est nulle si et seulement si :

$$p_{\mathbf{s}}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^n p_{s_i}(u_i), \quad (3.15)$$

c'est-à-dire si et seulement si les composantes du vecteur \mathbf{s} sont indépendantes. L'information mutuelle est en général difficilement utilisable dans la pratique car les ddp sont inconnues.

Définition 3.5 de l'entropie de Shannon $E(\mathbf{x})$:

Contrairement à la déconvolution aveugle (hypothèse de sources iid) [Don81], l'entropie n'est pas un contraste car elle reste identique en changeant \mathbf{s} par une transformation orthogonale [Com95].

$$E(\mathbf{x}) = - \int p_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \ln(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})) d\mathbf{u} \quad (3.16)$$

On montre cependant dans [Car98a] que $E(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ ou Infomax [BS95] est un contraste lorsque \mathbf{g} est un ensemble de n fonctions non linéaires strictement égales aux fonctions de répartition des sources s_i . Ce critère est très répandu dans la communauté neuronale mais nécessite de connaître la fonction \mathbf{g} adéquate. On montre dans [Car98b] que ce critère est aussi équivalent au contraste construit par le principe du maximum de vraisemblance.

En conclusion, ces contrastes ne sont pas applicables sans information a priori sur les ddp ou les fonctions de répartition des sources. Certaines approximations peuvent cependant être faites, soit sur la ddp par un développement de Gram-Charlier, soit sur les fonctions de répartition. Dans le premier cas, le développement est tronqué à l'ordre 4 et le contraste devient une fonction de cumulants d'ordre 4 [GL90] [Gaé91]. Le contraste peut alors être estimé directement à partir des observations. Concernant le critère infomax [BS95], on trouve dans [Car98b] le comportement de la séparation de sources lorsque la fonction \mathbf{g} s'éloigne de la fonction adéquate. Si l'écart est trop grand, soit les solutions recherchées peuvent devenir des points stationnaires instables, soit l'erreur sur la matrice séparante peut être importante

[Car98b]. Les fonctions g_i peuvent aussi être modélisée par exemple pour des signaux de parole par des fonctions du type $\frac{1}{1+\exp(-u_i)}$ et le contraste est maximisé à l'aide de réseaux de neurones [BS95].

Les mesures indirectes

Des mesures de décorrélation jusqu'à un certain ordre peuvent être obtenues à l'aide des moments et des cumulants des v.a. lorsqu'ils existent. Les premières fonctions de contraste ont été construites à partir des moments et des cumulants d'ordre 4 ([RL89], [Car90] [CS93] [Com90] [Com94b] [GL90]). Le principe commun à toutes ces fonctions est l'annulation des intercumulants d'ordre 2 et 4 des sources estimées. Nous rappelons quelques fonctions de contraste valides (3.17) (3.18) (3.19) (3.20) après ACP à partir du modèle simplifié (3.13) :

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^c |Cum[s_k, s_k^*, s_k, s_k^*]|^2 \quad (3.17)$$

$$\Phi_2 = - \sum_{i=1}^c \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^c \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^c \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^c |Cum[s_i, s_j^*, s_k, s_l^*]|^2 \quad (3.18)$$

$$\Phi_3 = \sum_{\substack{i,j,k,l=1 \\ i,j,k,l \neq i,j,k,k}}^c |Cum[s_i, s_j^*, s_k, s_l^*]|^2 \quad (3.19)$$

$$\Phi_4 = \sum_{k=1}^c |Cum[s_k, s_k, s_k, s_k]| \quad (3.20)$$

On trouvera en annexe B.2 la définition des cumulants d'une variable aléatoire. P. Comon a montré que Φ_1 et Φ_2 étaient des fonctions de contraste. Φ_2 est aussi la fonction obtenue par une méthode du maximum de vraisemblance lorsque la ddp est approchée par un développement de Gram-Charlier tronqué à l'ordre 4 [GL90]. D'autres méthodes font aussi appel à des maximisations de cumulants sous contrainte unitaire. Par exemple A. Souloumiac et J.-F. Cardoso proposent de maximiser la fonction Φ_3 (algorithme JADE) [Sou93]. Il est démontré dans [SC93] que les critères Φ_2 et Φ_3 sont asymptotiquement équivalents. L'intérêt d'utiliser Φ_3 est que ce critère est aussi un critère de diagonalisation conjointe de matrices de quadricovariances qui peut être optimisé par une technique de Jacobi. La matrice unitaire recherchée Π est alors paramétrée comme un produit de rotations de Givens [SC93]. E. Moreau a proposé une fonction de contraste Φ_4 basée sur la valeur absolue des autocumulants [Mor95].

Des contrastes plus simples peuvent être obtenus lorsque les signes des cumulants des sources sont connus. Par exemple, si toutes les sources recherchées ont un kurtosis négatif, la fonction Φ_5 (équation 3.21) est un contraste [MM96] :

$$\Phi_5 = \sum_{k=1}^c E[|s_k|^4] \quad (3.21)$$

3.5 Décorrélation à l'ordre 2

Lorsque les sources sont blanches temporellement, l'emploi de statistiques d'ordre supérieur est indispensable. En revanche, dans le cadre du mélange instantané, lorsque les sources sont temporellement corrélées et de fonctions de corrélation (ou spectres) assez différentes, les statistiques d'ordre 2 sont suffisantes et offrent l'avantage d'un coût limité. L'emploi d'informations à des retards différents de zéro permet d'estimer la matrice unitaire Π . Cette méthode, appelée SOBI, a été développée par A. Belouchrani [BAMCM97] et est couramment utilisée. Elle permet aussi de séparer des sources gaussiennes.

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont aléatoires, la décorrélation à l'ordre deux est caractérisée par la nullité (à tous les retards τ) de la fonction de corrélation définie à l'aide d'une moyenne d'ensemble :

$$C_{xy}(\tau) = \text{E}[x(t)y^*(t-\tau)] \quad (3.22)$$

Dans la pratique on invoque la stationnarité conjointe et l'ergodicité pour remplacer les moyennes d'ensemble par des moyennes temporelles :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{K} \sum_{t=-K/2+1}^{K/2} x(t)y^*(t-\tau) \quad (3.23)$$

Lorsque l'on veut étudier la décorrélation à l'ordre deux de n signaux temporellement colorés regroupés dans le vecteur colonne \mathbf{x} on est contraint de considérer conjointement une succession de matrices de covariance pour différents retards :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{xx}}(\tau) = \text{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^+(t-\tau)]$$

Cette idée a été utilisée en séparation de sources. Reprenons le modèle d'un mélange instantané temporel après une première étape de blanchiment par ACP :

Le modèle à c sources, centrées et de variance unitaire, et c capteurs devient :

$$\mathbf{x}(t) = \Pi \mathbf{s}(t) \quad (3.24)$$

La matrice Π est une matrice unitaire de taille $(c \times c)$. Le modèle a été obtenu après ACP, c'est-à-dire en diagonalisant la matrice de covariance au retard zéro. La matrice de corrélation au retard zéro de $\mathbf{x}(t)$ est maintenant égale à l'identité et la matrice Π n'est pas identifiable. Cependant, si les signaux sont temporellement corrélés, il reste des liens statistiques entre les composantes de $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{x}(t-\tau)$ pour $(\tau \neq 0)$. La matrice de corrélation au retard τ est alors égale à :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{xx}}(\tau) = \text{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^+(t-\tau)] = \Pi \theta \Pi^+ \quad (3.25)$$

où θ est une matrice diagonale contenant les termes $\text{E}[s_i(t)s_i^*(t-\tau)]$. Si les fonctions de corrélations sont assez différentes d'une source à l'autre, la matrice θ est différente de l'identité et Π est la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{C}_{\mathbf{xx}}(\tau)$. A. Belouchrani [BAMCM97] propose de diagonaliser de manière conjointe plusieurs matrices de corrélation $\mathbf{C}_{\mathbf{xx}}(\tau)$ sur un ensemble de retards $(\tau = 1, 2, \dots, k)$ pour rendre l'algorithme plus robuste.

3.6 Traitement du modèle convolutif

Le modèle général de mélange convolutif est :

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{l=0}^{+\infty} \mathbf{H}_l \mathbf{s}(t-l) + \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbf{L}_m \mathbf{n}(t-m), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.26)$$

où \mathbf{H}_l est la matrice $(n \times c)$ des coefficients $h_{ip}(l)$, $\mathbf{s}(t)$ est le vecteur $(c \times 1)$ des sources à l'instant t , \mathbf{L}_m est la matrice $(n \times n_b)$ des coefficients $l_{iq}(m)$ et $\mathbf{n}(t)$ est le vecteur $(n_b \times 1)$ des bruits. Pour que le problème soit soluble, on suppose que la matrice \mathbf{H}_0 est de rang plein.

La séparation de mélanges convolutifs peut s'appliquer à un grand nombre de problèmes. Les applications actuelles concernent essentiellement les mélanges non bruités ou faiblement bruités. On suppose que le nombre de capteurs est égal au nombre de sources. Les filtres sont supposés à réponse impulsionnelle finie et dont les inverses sont aussi à réponse impulsionnelle finie. De même que pour les mélanges instantanés, les méthodes de séparation de sources recherchent alors des filtrages des observations dont les composantes sont les plus indépendantes possibles. Les premiers algorithmes ont été développés par H. Héroult et C. Jutten à l'aide de réseaux de neurones en annulant des moments de fonctions non linéaires des sources estimées. D'autres critères ont ensuite été utilisés en annulant des intercumulants d'ordre 4 entre les sources estimées, ceci à différents instants de façon à obtenir suffisamment d'équations pour calculer les coefficients des différentes réponses impulsionnelles [NTJ95]. Quel que soit le critère d'indépendance utilisé, la résolution du problème est généralement adaptative, puisqu'il n'existe pas de solution analytique. Il se pose alors le problème de solutions parasites et de maxima locaux. L'unicité des solutions n'est prouvée, pour l'instant, que pour des signaux iid.

Le principal domaine d'application est le rehaussement de la parole [NTJ95], la séparation de signaux audio et de parole [Tor99] [WB99] et les communications [RJ99]. Un essai a été fait pour la surveillance de machines tournantes, dans le cas de mélanges quasiment non bruités. Le spectre des moteurs ne comporte que quelques harmoniques .

Le modèle général temporel ne semble pas convenir à des signaux fortement bruités. Une maximisation adaptative des critères dans un contexte bruité est impossible. C'est pourquoi, nous ne développerons pas plus ce paragraphe sur les modèles convolutifs temporels. On trouvera une bonne synthèse sur ces méthodes dans [Sim99].

3.7 Traitement des mélanges bruités

Peu d'auteurs traitent actuellement le cas de mélanges additivement bruités. La plupart supposent que les composantes du bruit additif sont des variables gaussiennes. Par exemple, [Hyv99] définit les moments gaussiens d'une variable aléatoire et propose une fonction de contraste qui ne présente pas de biais en présence d'observations perturbées par des bruits additifs gaussiens. La matrice de covariance des bruits est cependant supposée connue. Des méthodes n'utilisant que des cumulants d'ordre 4, insensibles à la présence de bruits gaussiens,

peuvent aussi convenir. Malheureusement, ces méthodes nécessitent la plupart du temps une première étape à l'ordre 2 de blanchiment (ACP).

L'étape d'Analyse en Composantes Indépendantes est aussi une manière efficace de réduire les composantes de bruit si l'on a accès à plus d'observations que de sources. Elle nécessite cependant l'hypothèse de bruits spatialement blancs [Lac99]. Dans le cas où il y a autant de capteurs que de sources et que les sources sont temporellement corrélées, l'analyse spectrale singulière (Singular Spectrum Analysis) [VVVC99] projette un vecteur composé des observations $\mathbf{r}(t)$ et des observations décalées jusqu'au retard p : $[\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t-1), \dots, \mathbf{r}(t-p)]$ sur les directions principales calculées par l'ACP.

Une dernière possibilité consiste à ajouter à l'étape d'identification de la matrice de mélange et de séparation, une étape de réduction de bruit. Ceci permet d'obtenir le séparateur optimal au sens du rapport Signal à Bruit plus Interférences [Che95]. Il est donc important d'avoir une bonne estimation de $\mathbf{H}^\#$ même en contexte bruité, en vue de la réduction de bruit pour avoir des références ne contenant chacune qu'une source et du bruit (voir chapitre 2).

3.8 Traitement de signaux vibratoires

Dans l'application envisagée, les sources de vibration sont d'origine aérodynamique, mécanique ou électromagnétique [Dér92]. Elles sont liées aux éléments tournants, donc périodiques. Elles forment des familles d'harmoniques à des fréquences fondamentales parfois différentes. En première approximation, le signal observé sur un accéléromètre placé sur la carcasse d'une machine tournante peut être modélisé par une somme de sources sinusoïdales de fréquences différentes et additivement bruitées. Le spectre des signaux d'accéléromètres présente un bruit additif de puissance très différente d'un capteur à l'autre. L'analyse et le traitement de ces signaux seront détaillés dans la troisième partie.

Dans les chapitres 1 et 2, nous avons défini la problématique de la séparation de signaux et établi un panorama des principes et des méthodes utilisés. Le modèle le mieux adapté à ce type de signaux semble celui du mélange spectral qui est insensible à une dynamique parfois très différente d'un canal à l'autre. D'autre part, il n'existe pas de méthode efficace utilisant un modèle convolutif bruité.

Nous proposons, dans la seconde partie de ce manuscrit, d'élaborer une technique de séparation pour ce type de signaux. Dans le cas de signaux bruités, le séparateur optimal au sens du rapport Signal à Bruit plus Interférences [Che95] doit être calculé. C'est celui qui assure en sortie du système la meilleure restitution d'une source. Pour cela, il faut calculer $\mathbf{H}^\#$ en contexte bruité, dans chaque canal fréquentiel. L'identification de $\mathbf{H}^\#$ sera d'autant meilleure que les signaux seront moins bruités. Ceci nous amènera à développer une technique d'ACP spécifique aux signaux vibratoires en utilisant un modèle sinusoïdal des sources et des observations temporellement décalées. La matrice Π sera elle aussi calculée à l'aide d'observations temporellement corrélées de manière à éliminer l'influence du bruit. Nous supposons que le support de corrélation du bruit est fini, contrairement à celui des sources sinusoïdales

théoriquement infini.

D'autre part, nous avons vu au chapitre 1 qu'un couple de sinusoides à paramètres déterministes et de fréquences incommensurables peut être vu comme la réalisation d'un couple de signaux aléatoires, indépendants, conjointement stationnaires et ergodiques. Nous pouvons donc appliquer à ce type de signaux déterministes des outils statistiques (par exemple aux ordres supérieurs) et des mesures d'indépendance statistiques estimées sur une réalisation.

3.9 Conclusion

Nous avons proposé un aperçu des différentes techniques possibles de séparation de signaux. L'emploi de SOS est indispensable lorsque les sources sont blanches temporellement ou lorsque leurs supports de corrélation sont identiques à ceux des bruits. En revanche lorsque les supports de corrélations des sources sont supérieurs à ceux des bruits, les statistiques d'ordre 2 sont suffisantes et offrent l'avantage d'un coût limité. L'ensemble des méthodes nécessite la connaissance du nombre de sources et n'est pas robuste à une sous ou surestimation du nombre de composantes. C'est aussi un des points cruciaux de ce type de techniques.

Nous souhaitons traiter des mélanges convolutifs bruités de sources à long support de corrélation (signaux vibratoires de machines tournantes). La deuxième partie sera entièrement consacrée au traitement de ce type de données. L'ensemble des méthodes présentées nous incite à donner la préférence à des techniques orthogonales fréquentielles (paragraphe 3.8). Nous exploiterons la longueur des supports de corrélation des sources en utilisant des décalages temporels avant de passer dans la représentation fréquentielle de façon à définir des matrices spectrales particulières, appelées Matrices Spectrales Décalées. Nous verrons dans la deuxième partie que leur rang correspond au nombre de sources et qu'elles conduisent à une estimation robuste du sous-espace signal, de la matrice de blanchiment et de la transformation orthogonale en contexte fortement bruité avec des bruits non nécessairement gaussiens et non spatialement blancs. Ces étapes étant robustes (bonne estimation de $\mathbf{H}^\#$), nous pourrons alors procéder à une étape de réduction de bruit par filtrage de Wiener multi-références.

Deuxième partie

**SEPARATEUR FREQUENTIEL A
DECALAGES TEMPORELS**

Introduction

Cette partie a pour objectif de mettre en place une technique de séparation adaptée aux signaux vibratoires et robuste aux bruits additifs. Dans la première partie, nous avons défini la problématique de la séparation de sources et établi un panorama des principes et des méthodes utilisés. Le modèle le mieux adapté à ce type de signaux est celui du mélange spectral. Dans un contexte fortement bruité, il est important d'effectuer une première étape de projection sur le sous-espace signal. Ceci permet d'augmenter le rapport signal à bruit global et de réduire le nombre d'observations. Nous cherchons à calculer efficacement la matrice de blanchiment, c'est-à-dire indirectement les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice spectrale des observations non bruitées. Tout le problème consiste donc à estimer la matrice spectrale des observations non bruitées à partir des observations bruitées. L'Analyse en Composantes Principales est proscrite puisque les bruits ne sont pas spatialement blancs. En effet, dans cette méthode certains vecteurs propres ne sont dans le sous-espace signal que lorsque les bruits sont spatialement blancs.

Nous proposons une ACP revisitée, robuste aux perturbations, et adaptée aux sources à bande étroite. L'étude menée au chapitre 1 nous autorise à supposer que, dans l'application envisagée, les sources sont des sommes de sinusoïdes. Le support de corrélation des sinusoïdes est théoriquement infini et celui des bruits peut être supposé fini. Puisque le support de corrélation des sources est supérieur à celui des bruits, il est possible d'obtenir une matrice spectrale "débruitée" en utilisant des observations temporellement décalées \mathbf{r}^t et $\mathbf{r}^{t+\tau}$. Nous avons dénommé ces matrices spectrales dépendant du retard τ "Matrices Spectrales Décalées". Les matrices ainsi construites (non hermitiennes) ne subissent pas l'influence des bruits, si le retard τ est bien choisi. Nous montrons que deux Matrices Spectrales Décalées particulières suffisent pour déterminer la matrice spectrale des observations non bruitées et donc la matrice de blanchiment.

Le chapitre 4 définit tout d'abord les Matrices Spectrales Décalées et leurs estimateurs. Nous calculons l'estimateur non biaisé pour des composantes sinusoïdales. Dans le chapitre 5, nous développons la méthode totale de séparation de signaux à spectre de raies à l'aide des Matrices Spectrales Décalées en supposant le nombre de sources connu. Le chapitre 6 traite ensuite de l'estimation du nombre de sources temporellement corrélées dans un contexte fortement bruité.

Chapitre 4

Spectres et Matrices spectrales décalés

4.1 Introduction

Nous présentons ici un outil que nous allons utiliser pour les deux étapes de séparation et pour l'estimation du nombre de sources. Le spectre décalé d'un mélange de signaux permet de supprimer les composantes à faible support de corrélation c'est-à-dire, dans notre cas, les bruits. Nous le définissons comme l'interspectre entre un signal $s(t)$ et le même signal décalé temporellement $s(t + \tau)$ (paragraphe 4.2). On obtient ainsi une famille de spectres décalés paramétrés par le retard τ . L'intérêt de ces spectres est qu'ils s'affranchissent d'un bruit additif si le retard τ est assez grand vis-à-vis du support de corrélation du bruit. Nous nous intéressons surtout au cas d'une source sinusoïdale (paragraphe 4.3) ou d'une somme de sinusoïdes (paragraphe 4.4). Nous calculons dans un premier temps le spectre décalé théorique puis l'estimateur non biaisé (paragraphe 4.5).

Le spectre décalé a été défini pour la première fois dans [DGA98] et appelé spectre "autocohérent". Les auteurs ont appliqué le "spectre autocohérent" à l'estimation et l'élimination de sinusoïdes en utilisant l'information contenue dans la phase.

4.2 Définition des spectres décalés

Soit $s(t)$ un signal aléatoire stationnaire à l'ordre deux et $a_N(t)$ une fenêtre d'apodisation non nulle sur N échantillons. On note $x(t) = s(t) a_N(t)$ et $x(t + \tau) = s(t + \tau) a_N(t)$. Le spectre décalé de $s(t)$ est défini comme la dsp de $x(t)$ et de $x(t + \tau)$:

$$R_{ss}^\tau(\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{X(\nu) X^\tau(\nu)^*}{N} \right] \quad (4.1)$$

Ici $X(\nu)$ et $X^\tau(\nu)$ sont respectivement la *TFR* de $x(t)$ et la *TFR* de $x(t + \tau)$, définies par les expressions suivantes :

$$X(\nu) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s(i) a_N(i) e^{-j2\pi i\nu}$$

$$X^\tau(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k + \tau) a_N(k) e^{-j2\pi k\nu}$$

En développant l'espérance mathématique de la relation (4.1) apparaît la fonction de corrélation C_s du signal utile :

$$\mathbb{E} \left[\frac{X(\nu) X^\tau(\nu)^*}{N} \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_s(i - k - \tau) a_N(i) a_N^*(k) e^{-j2\pi(i-k)\nu}$$

Le changement de variable $l = i - k$ fait apparaître la fonction de corrélation C_{a_N} de l'apodisation :

$$\mathbb{E} \left[\frac{X(\nu) X^\tau(\nu)^*}{N} \right] = \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_s(l - \tau) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_N(l + k) a_N^*(k) \right) \cdot e^{-j2\pi l\nu}$$

Finalement le spectre décalé s'écrit en limite comme la TFR du produit des fonctions de corrélation (relation 4.2). En imposant une normalisation de l'apodisation (4.3) on obtient (relation 4.4) une formulation générale du théorème de Wiener-Kintchine pour $\tau \neq 0$.

$$R_{ss}^\tau(\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_{a_N}(l) C_s(l - \tau) e^{-j2\pi l\nu} \quad (4.2)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_{a_N}(l)}{N} = 1 \quad \forall k \quad (4.3)$$

$$R_{ss}^\tau(\nu) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_s(l - \tau) e^{-j2\pi l\nu} = e^{-j2\pi\nu\tau} R_{ss}(\nu) \quad (4.4)$$

Le spectre R_{ss}^τ obtenu par passage à la limite n'a pas d'intérêt particulier par rapport au spectre R_{ss} . Nous verrons ultérieurement que tout l'intérêt du retard τ apparaît dans l'emploi de l'estimateur $\widehat{R_{ss}^\tau}$ (on ne passe pas à la limite) lorsque la fonction d'apodisation est de durée bien inférieure au retard ($N \ll \tau$).

4.3 Spectre décalé théorique d'une fréquence pure

Soit le signal $s(t) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0)$ où ϕ_0 est un paramètre aléatoire uniformément réparti sur $[-\pi, \pi[$, A_0 et ν_0 sont des paramètres déterministes. La fonction de corrélation est :

$$\begin{aligned}
 C_s(l) &= \text{E} [s(t) s^*(t-l)] \\
 &= A_0^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2\pi\nu_0 t + u) \cos(2\pi\nu_0(t-l) + u) p_{\phi_0}(u) \, du \\
 &= \frac{A_0^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(2\pi\nu_0(2t-l) + 2u) + \cos(2\pi\nu_0 l)] \, du \\
 &= \frac{A_0^2}{2} \cos(2\pi\nu_0 l)
 \end{aligned}$$

et le spectre décalé (exprimé aux fréquences positives uniquement) :

$$R_{s_s}^\tau(\nu) = \frac{A_0^2}{4} e^{-j2\pi\nu_0\tau} \delta(\nu - \nu_0) \quad (4.5)$$

On obtient donc une grandeur à valeurs complexes. En raison de la périodicité de la fonction de corrélation le retard τ introduit simplement un terme de phase. L'amplitude du spectre est inchangée.

4.4 Spectre décalé théorique d'une somme de fréquences pures

Soit le signal $s(t) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi\nu_k t + \phi_k)$ où les phases à l'origine ϕ_k sont des paramètres aléatoires indépendants uniformément répartis sur $[-\pi, \pi[$. La fonction de corrélation est :

$$C_s(l) = \sum_{k=1}^K \frac{A_k^2}{2} \cos(2\pi\nu_k l) \quad (4.6)$$

donnant le spectre décalé suivant (exprimé ici aux fréquences positives uniquement) :

$$R_{s_s}^\tau(\nu) = \sum_{k=1}^K \frac{A_k^2}{4} e^{-j2\pi\nu_k\tau} \delta(\nu - \nu_k) \quad (4.7)$$

4.5 Estimation du spectre décalé par TFD

4.5.1 Etude de l'estimateur

Dans la pratique le spectre est estimé par une moyenne empirique à partir d'un signal de durée finie. La durée N de la fenêtre d'apodisation est donc figée. On découpe le signal en M tranches de N échantillons avec un pas de glissement de L échantillons. Chaque tranche, repérée par l'indice t de son premier échantillon, est apodisée par une fonction $a_N(i)$ pour imposer la forme spectrale du filtre d'analyse :

$$x^t(i) = s(t+i) a_N(i), \quad \begin{cases} i \in [0, N-1] \\ t = mL, \quad m \in [0, M-1] \end{cases}$$

On calcule ensuite la TFD_N de chaque tranche

$$X^t(f) = \theta \sum_{i=0}^{N-1} s(t+i) a_N(i) e^{-j2\pi i \frac{f}{N}}$$

et l'estimateur du spectre décalé est défini par la relation (4.8) où A est un facteur de calibration que nous précisons lors de l'étude du biais.

$$\widehat{R}_{ss}^\tau(f) = \frac{A}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{X^{mL}(f) X^{\tau+mL}(f)^*}{\theta^2}, \quad f \in [0, N-1] \quad (4.8)$$

Le signal est supposé stationnaire et ergodique et par conséquent, dans le calcul de $E[\widehat{R}_{ss}^\tau(f)]$, tous les termes $E[X^{mL}(f) X^{\tau+mL}(f)^*]$ sont identiques. Ils peuvent être remplacés par le terme général $E[X^t(f) X^{t+\tau}(f)^*]$ que nous développons à présent :

$$E[X^t(f) X^{t+\tau}(f)^*] = \theta^2 \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} C_s(i-k-\tau) a_N(i) a_N^*(k) e^{-j2\pi(i-k)\frac{f}{N}}$$

Pour calculer la double somme on place tous les termes sur le tableau de la figure 4.1. On

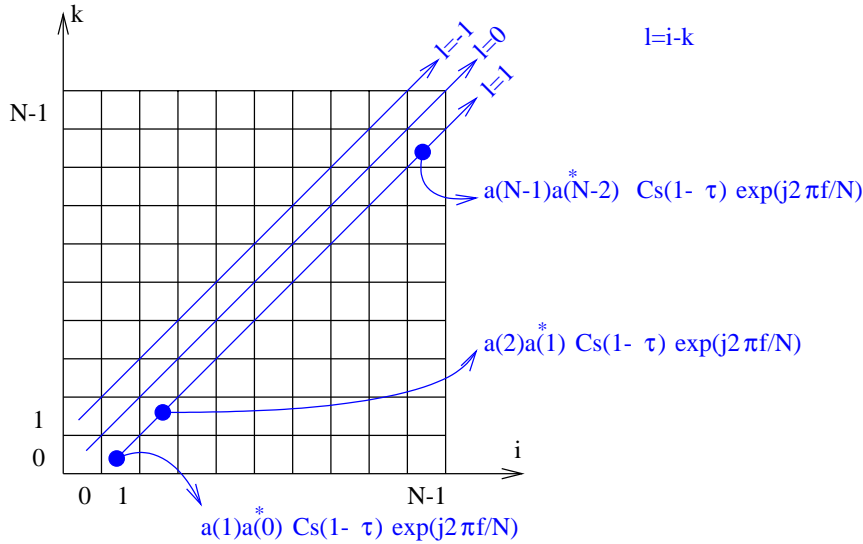


FIG. 4.1: Calcul de la double somme

remarque alors que tous les éléments de la diagonale d'indice l contiennent le même terme $C_s(l-\tau) e^{-j2\pi l \frac{f}{N}}$ pondéré par un terme variable $a_N(i) a_N^*(k)$ avec $i-k=l$. La somme des termes de la diagonale principale vaut :

$$\left(\sum_{i=0}^{N-1} a_N(i) a_N^*(i) \right) C_s(\tau) = C_{a_N}(0) C_s(\tau)$$

La somme des termes d'une diagonale inférieure ($1 \leq l \leq N-1$) vaut :

$$\left(\sum_{i=l}^{N-1} a_N(i) a_N^*(i-l) \right) C_s(l-\tau) e^{-j2\pi l \frac{f}{N}} = C_{a_N}(l) C_s(l-\tau) e^{-j2\pi l \frac{f}{N}}$$

La somme des termes d'une diagonale supérieure ($-N + 1 \leq l \leq -1$) vaut :

$$\left(\sum_{k=-N+1}^l a_N(-k+l) a_N^*(-k) \right) C_s(l-\tau) e^{-j2\pi l \frac{f}{N}} = C_{a_N}(l) C_s(l-\tau) e^{-j2\pi l \frac{f}{N}}$$

La somme globale vaut donc

$$E[X^t(f) X^{t+\tau}(f)^*] = \theta^2 \sum_{l=-N+1}^{N-1} C_{a_N}(l) C_s(l-\tau) e^{-j2\pi l \frac{f}{N}}$$

et la moyenne d'ensemble de l'estimateur est finalement la version échantillonnée (aux fréquences réduites $\nu = \frac{f}{N}$) de la relation théorique (4.2) sans la limite sur N :

$$E[\widehat{R}_{ss}^\tau(f)] = A \sum_{l=-N+1}^{N-1} C_{a_N}(l) C_s(l-\tau) e^{-j2\pi l \frac{f}{N}} \quad (4.9)$$

En raison de la durée limitée de C_{a_N} et du retard τ seule une partie de C_s est vue. Considérons le cas d'un signal utile s perturbé par un bruit b . Représentons, pour différents valeurs du retard τ , le terme utile $C_{a_N}(l) C_s(l-\tau)$ et le terme perturbateur $C_{a_N}(l) C_b(l-\tau)$ qui contribuent au calcul du spectre décalé de l'observation. On observe une contribution de moins en moins importante du bruit au fur et à mesure que τ augmente. Les figures 4.2, 4.3 et 4.4 représentent le cas d'une fréquence pure et d'un bruit blanc gaussien.

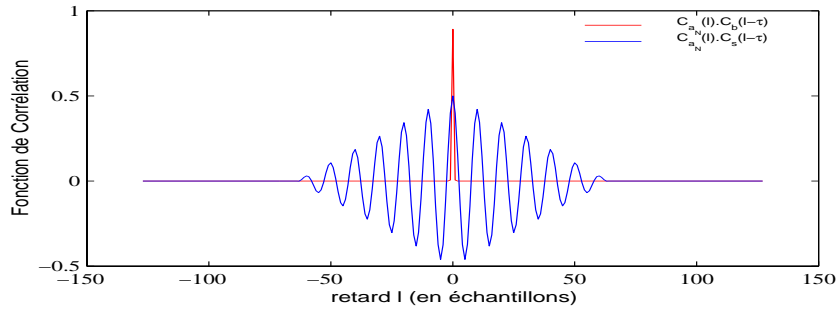


FIG. 4.2: Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, $N = 64$ et $\tau = 0$.

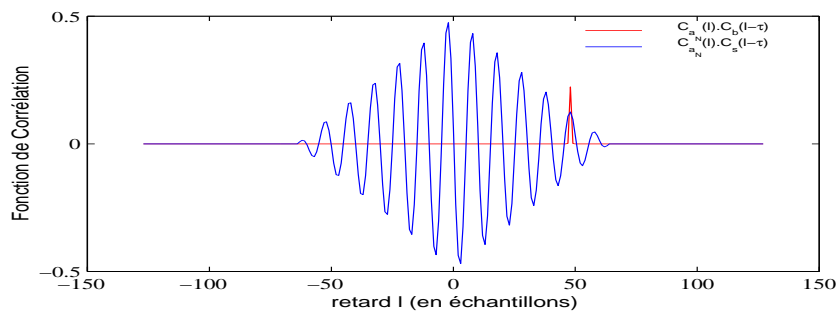


FIG. 4.3: Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, $N = 64$ et $\tau = \frac{3}{4}N$.

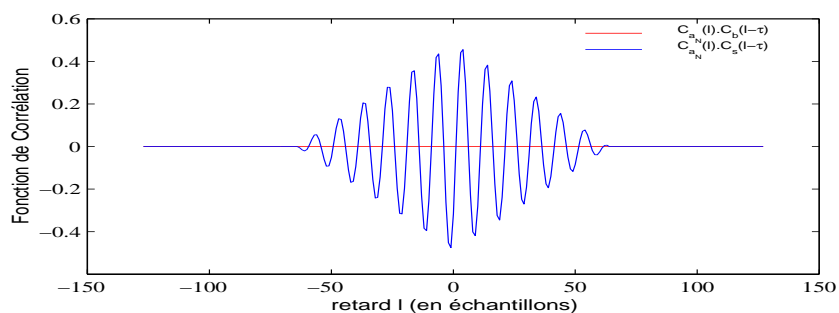


FIG. 4.4: Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, $N = 64$ et $\tau = N$.

Les figures 4.5, 4.6 et 4.7 représentent le cas d'une somme de deux fréquences pures proches et d'un bruit non blanc uniforme.

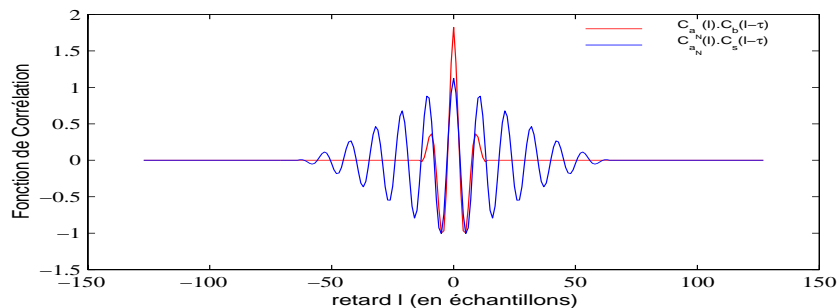


FIG. 4.5: Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes proches, $N = 64$ et $\tau = 0$.

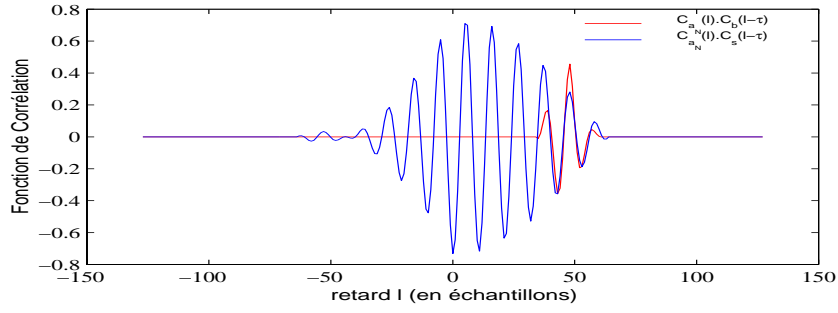


FIG. 4.6: Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes proches, $N = 64$ et $\tau = \frac{3}{4}N$.

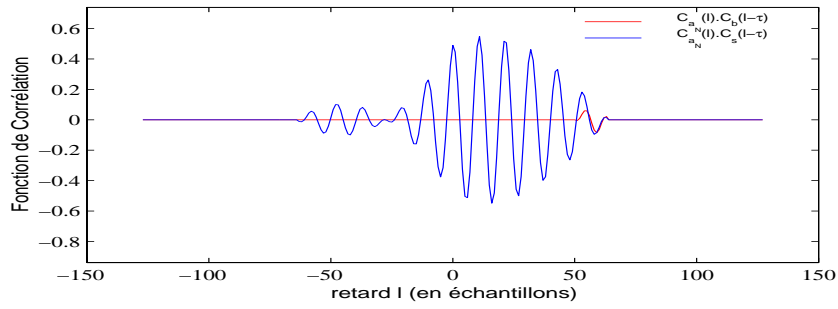


FIG. 4.7: Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes proches, $N = 64$ et $\tau = N$.

Ces illustrations nous permettent de comprendre que dans le cas général l'estimateur du spectre décalé sera biaisé. Le biais dépend à la fois de la durée de corrélation du signal ¹ (τ_s pour un signal utile et τ_b pour un bruit), de la valeur de τ et de N ainsi que de la forme de C_{a_N} . Nous allons voir que pour certaines familles de signaux et sous certaines conditions le choix du coefficient A permet de limiter le biais.

4.5.2 Cas d'un bruit aléatoire à faible durée de corrélation

Etudions la forme du spectre décalé pour un bruit aléatoire à faible durée de corrélation. Si la durée de corrélation du bruit vérifie $\tau_b \ll N$ et que le retard est choisi de telle sorte que $|\tau| \leq N - \tau_b$ alors la fonction de corrélation du signal est vue dans son ensemble. Etant donné que $C_{a_N}(l)$ varie lentement autour de τ ,

$$\mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}^\tau(f) \right] \simeq A C_{a_N}(\tau) R_{ss}^\tau \left(\frac{f}{N} \right)$$

et la mesure est approximativement non biaisée en choisissant

$$A = \frac{1}{C_{a_N}(\tau)}$$

¹On définit la durée de corrélation d'un signal comme la demi-longueur de sa fonction de corrélation.

Encore faut-il connaître $C_{a_N}(l)$. Dans la pratique pour l'obtenir on utilise la technique TFD - quadrature - TFD Inverse. Nous souhaitons arrêter l'attention du lecteur sur le fait que cette technique fournit en fait une corrélation circulaire :

$$\widehat{C}_{a_N}(l) = \text{TFDI} \left(|\text{TFD}(a_N(t))|^2 \right) = \theta \sum_{t=0}^{N-1} a(t) a([t-l]_N)$$

Dans cette écriture $[\cdot]_N$ désigne le modulo N . Pour éviter ce phénomène il est souhaitable d'ajouter N zéros à l'apodisation et d'effectuer TFD et TFD Inverse sur $2N$ échantillons. On obtient alors :

$$\widehat{C}_{a_N}(l) = \theta \sum_{t=0}^{2N-1} a(t) a(t-l)$$

Dans la pratique, comme $\widehat{C}_{a_N}(l)$ peut s'annuler, on ajoute une constante positive ε liée à la précision du calculateur et le coefficient de calibration est finalement :

$$A = \frac{\theta}{\widehat{C}_{a_N}(\tau) + \varepsilon}$$

Si le retard est choisi de telle sorte que $|\tau| > N + \tau_b$ alors la fonction de corrélation du signal utile est totalement décalée par rapport à celle de l'apodisation et l'on a donc :

$$\mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}^\tau(f) \right] = 0 \quad \text{pour toute valeur finie de } A$$

Ce résultat nous indique que l'estimateur du spectre décalé permet de supprimer les bruits large bande.

4.5.3 Cas d'un signal aléatoire bande étroite

Si $\tau_b \gg N$ et que $|\tau| < N + \tau_b$, seule une partie de l'information contenue dans la fonction de corrélation est éliminée par l'apodisation et le retard.

4.5.4 Cas d'une fréquence pure

Etant donné que le support de C_{a_N} est $[-N + 1, N - 1]$ la relation (4.9) peut aussi s'écrire comme une somme infinie. On reconnaît l'écriture de la TFR de $C_{a_N}(l)$ $C_s(l - \tau)$ échantillonnée aux fréquences réduites $\nu = \frac{f}{N}$:

$$\mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}^\tau(f) \right] = A \cdot \int_{\omega}^{\omega+1} R_{a_N}(\nu - u) R_{ss}^\tau(u) du \cdot \sum_{f=0}^{N-1} \delta \left(\nu - \frac{f}{N} \right) \quad (4.10)$$

avec

$$R_{a_N}(\nu) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_{a_N}(l) e^{-j2\pi l\nu} = |A_N(\nu)|^2$$

et $R_{ss}^\tau(\nu)$ est donné par la relation (4.5) pour une sinusoïde à la fréquence ν_0 . La relation (4.10) exprimée au canal f_0 le plus proche de ν_0 devient :

$$E \left[\widehat{R_{ss}^\tau}(f_0) \right] = A \int_{\omega}^{\omega+1} R_{a_N}(\nu - \nu_0) \frac{A_0^2}{4} e^{-j2\pi\nu_0\tau} \delta(u - \nu_0) du \cdot \delta\left(\nu - \frac{f_0}{N}\right)$$

et l'amplitude de la mesure est finalement

$$E \left[\widehat{R_{ss}^\tau}(f_0) \right] = A \cdot R_{a_N}\left(\frac{f_0}{N} - \nu_0\right) \cdot \frac{A_0^2}{4} e^{-j2\pi\nu_0\tau} \quad (4.11)$$

Etant donné que ν_0 est inconnue mais proche de $\frac{f_0}{N}$, le coefficient de calibration de la relation (4.12) rend l'estimateur approximativement non biaisé.

$$A = \frac{1}{R_{a_N}(0)} = \frac{1}{\sum_{l=-N+1}^{N-1} C_{a_N}(l)} \quad (4.12)$$

D'après la remarque faite précédemment pour le calcul de $\widehat{C_{a_N}}(l)$, on a dans la pratique :

$$A = \frac{\theta}{\sum_{l=-N+1}^{N-1} \widehat{C_{a_N}}(l)} \quad (4.13)$$

4.5.5 Cas d'une somme de fréquences pures

La fonction de corrélation d'une somme de sinusoïdes est une somme de sinusoïdes aux mêmes fréquences. La relation trigonométrique

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

met en évidence la présence d'une modulation d'amplitude. Dans le cas de deux sinusoïdes aux fréquences réduites ν_1 et ν_2 la période de la fonction de corrélation est donc $\frac{1}{\left|\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\right|}$. Si les deux sinusoïdes sont vues dans le même canal numérique on peut considérer que l'écart entre les deux fréquences vérifie $|\nu_1 - \nu_2| < \frac{1}{N}$. De ce fait la période de C_s est supérieure ou égale à $2N$. Le support de C_{a_N} étant exactement de $2N$, l'estimation est biaisée. Ce phénomène se comprend en observant les figures 4.5, 4.6 et 4.7. Nous verrons ultérieurement que dans la pratique le biais n'est pas très important.

4.5.6 Conclusion sur l'estimateur

Pour les sinusoïdes l'estimateur du spectre décalé conserve l'essentiel de l'énergie. En revanche il atténue considérablement celle des bruits (y compris ceux à bande étroite) pour peu que le retard τ soit supérieur à la taille N des tranches de TFD. Ceci en fait un outil de choix pour la détection des signaux périodiques et pseudo-périodiques² en contexte fortement bruité. Pour cette raison nous faisons le choix du coefficient de calibration (4.12) ou (4.13) qui supprime le biais dans le cas des sinusoïdes. Un autre intérêt des spectres décalés est qu'ils permettent de définir un estimateur du RSB pour des signaux expérimentaux. Cette étude est présentée en annexe C.2.

²Les signaux pseudo-périodiques sont constitués d'une somme de fréquences pures dont les composantes ne sont pas multiples entiers d'un fondamental, contrairement aux signaux périodiques.

4.6 Matrices Spectrales Décalées

Considérons maintenant un signal vectoriel $\mathbf{r}(t)$ de dimension $n \times 1$ stationnaire à l'ordre deux. La Matrice Spectrale Décalée de $\mathbf{r}(t)$ à la fréquence réduite ν et au retard τ se définit à partir des TFR de $\mathbf{r}(t)$ et de $\mathbf{r}(t + \tau)$ notées respectivement $\mathbf{r}(\nu)$ et $\mathbf{r}^\tau(\nu)$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau(\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{\mathbf{r}(\nu) \mathbf{r}^\tau(\nu)^+}{N} \right] \quad (4.14)$$

Cette matrice contient donc les autospectres et interspectres décalés de toutes les composantes du vecteur \mathbf{r} . Comme pour un signal monodimensionnel c'est l'estimation de la matrice spectrale sur une durée finie qui permet de "sélectionner" les signaux à long support de corrélation.

Pour obtenir l'estimateur de la matrice spectrale nous découpons le signal vectoriel en M tranches de N échantillons avec un pas de glissement de L échantillons. Chaque tranche, est repérée par l'indice de son premier échantillon. La TFD de la tranche d'indice t au canal fréquentiel f est notée $\mathbf{r}^t(f)$. L'estimateur approximativement non biaisé pour les sinusoïdes est :

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau(f) = \frac{1}{M \sum_{l=-N+1}^{N-1} \widehat{C}_{a_N}(l)} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\mathbf{r}^{mL}(f) \cdot \mathbf{r}^{\tau+mL}(f)^+}{\theta}, \quad f \in [0, N-1] \quad (4.15)$$

Lorsque le retard τ vérifie $|\tau| > N + \tau_b$ où τ_b est la plus grande durée de corrélation des bruits alors la matrice spectrale $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau(f)$ ne contient que les contributions des signaux utiles. Cette matrice sera donc d'une grande utilité pour nous permettre de mener à bien une opération d'Analyse en Composantes Principales en contexte de bruits spatialement cohérents et de puissances différentes. Malheureusement cette matrice est en général non hermitienne non définie positive (voir annexe C.3) contrairement aux matrices spectrales classiques. Nous verrons donc au chapitre suivant qu'une seconde Matrice Spectrale Décalée sera nécessaire pour obtenir la matrice spectrale des mélanges non bruités.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les spectres et matrices spectrales décalés. Ces outils serviront dans les chapitre suivants pour les étapes de séparation (chapitre 5) et d'estimation du nombre de sources (chapitre 6). Nous supposons que le support de corrélation du bruit est inférieur à celui des sources. Dans le cas de sources sinusoïdales, cette condition est vérifiée. L'intérêt de ces outils est de pouvoir s'affranchir du bruit additif si le paramètre τ est assez grand vis-à-vis du support de corrélation du bruit. Nous avons défini un estimateur des spectres décalés et Matrices Spectrales Décalées et donné le choix du coefficient de calibration qui supprime le biais dans de cas de sources sinusoïdales.

Chapitre 5

Séparation de signaux à spectres de raies, méthode à retards

5.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de mettre en place une technique orthogonale de séparation adaptée aux signaux à spectres de raies et robuste aux bruits. A la suite de la synthèse présentée au chapitre 3, nous avons choisi de travailler dans chaque canal fréquentiel. Le modèle est celui du mélange spectral et nous supposons que le nombre de composantes-sources mélangées dans chaque canal fréquentiel est connu. Nous abordons le problème d'estimation du nombre de sources au chapitre suivant.

Nous avons vu (chapitre 2) qu'en contexte bruité il est souhaitable de réaliser la séparation de signaux en maximisant le Rapport Signal à Bruit plus Interférences. Nous allons maintenant montrer que le filtre optimal peut se découper en deux étapes. La première étape identifie la matrice de mélange \mathbf{H} à partir des observations bruitées et réalise la séparation. La seconde étape effectue une opération de réduction de bruit. Rappelons la forme de la matrice de mélange :

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}\Lambda^{1/2}\Pi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{V} : \text{matrice unitaire} \\ \Pi : \text{matrice unitaire} \\ \Lambda^{1/2} : \text{matrice diagonale} \end{cases}$$

L'estimation de la matrice de mélange est elle même séparée en deux étapes : estimation de la matrice de blanchiment ($\mathbf{W} = \Lambda^{-1/2}\mathbf{V}^+$) et estimation d'une matrice unitaire restante Π . Comme le montre le chapitre 3, l'ACP classique ne peut être utilisée dans la première étape car elle n'est pas adaptée aux situations bruitées, sans connaissance sur la matrice spectrale des bruits ou sans l'hypothèse de bruits spatialement blancs.

Le paragraphe 5.3 montre comment obtenir la matrice spectrale des mélanges non bruités à partir de deux Matrices Spectrales Décalées des observations. Cette technique suppose que les sources sont des sinusoides et que les bruits ont des supports de corrélation finis. Nous

définissons ainsi une ACP robuste dans un contexte de bruits spatialement corrélés.

Au paragraphe 5.4 nous nous intéressons à la détermination de la matrice unitaire Π . Les techniques classiques permettent d'estimer Π en absence de bruit à l'aide de statistiques d'ordre deux [BAMCM97] et en présence de bruits gaussiens à l'aide de statistiques d'ordre supérieur à deux (SOS) [GL90]. Malheureusement, lorsque les bruits ne sont pas gaussiens ou lorsque les niveaux de bruits sont élevés, ces techniques génèrent des erreurs d'estimation importantes. Nous montrons, au paragraphe 5.4, que lorsque les supports de corrélation des sources sont supérieurs à ceux des bruits, il est possible d'estimer Π à l'aide de statistiques d'ordre deux. Nous développons une méthode spectrale dans laquelle nous diagonalisons une Matrice Spectrale Décalée à chaque canal fréquentiel alors que [BAMCM97] diagonalise des matrices d'intercorrélations.

Après cette première étape chaque sortie contient une source et du bruit. La matrice \mathbf{W} réalise la projection des observations sur une base du sous-espace signal. En réalisant aussi une projection sur les directions complémentaires, nous obtenons des références bruit seul en vue de l'étape de réduction de bruit (paragraphe 5.5.1). La dernière étape, décrite au paragraphe 5.5, consiste à débruiter chacune des premières voies à l'aide des autres.

Le schéma du séparateur auquel nous allons aboutir est donné à la figure 5.1 où \mathbf{r}^t désigne le vecteur des observations au canal fréquentiel traité. Nous allons à présent détailler chacune des parties du système, puis nous présenterons des résultats de simulation dans un contexte fortement bruité.

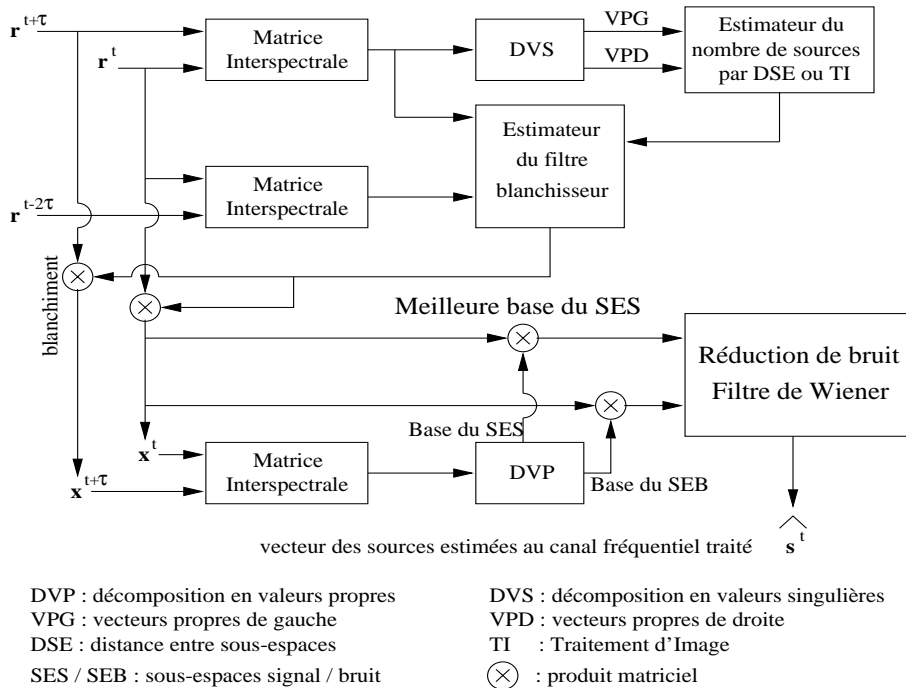


FIG. 5.1: Schéma du séparateur à décalages

5.2 Position du problème (rappels)

Nous considérons un système linéaire et stationnaire à n_s entrées et n ($n \geq n_s$) sorties. Les n_s signaux sources présents en entrée sont constitués d'une somme de composantes sinusoïdales qui ne sont pas nécessairement harmoniques. Il peut donc s'agir de signaux presque périodiques tels que ceux obtenus par des modulations d'amplitude de signaux périodiques de fondamentaux non multiples. Notons c_i le nombre de composantes sinusoïdales de la i ème source et respectivement A_i^k , ν_i^k , ϕ_i^k l'amplitude, la fréquence et la phase de la k ème composante au sein de cette source. On obtient :

$$s_i(t) = \sum_{k=1}^{c_i} A_i^k \cos(2\pi\nu_i^k t + \phi_i^k) \quad (5.1)$$

On suppose que des sources différentes n'ont pas de composantes à la même fréquence. En revanche elles peuvent posséder des composantes proches. La difficulté du problème de séparation provient de la présence de fréquences pures proches non résolues par la TFD.

Les capteurs observent des mélanges convolutifs additivement bruités. Les bruits sont supposés décorrélés des sources mais peuvent être corrélés entre eux. Tous les signaux sont supposés centrés. Les traitements sont réalisés dans le domaine fréquentiel après Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur des blocs de N échantillons. L'analyse à durée limitée provoque un étalement spectral et les composantes proches se mélangent. On dispose alors d'un mélange fréquentiel instantané par canal fréquentiel. Notons c le nombre de composantes sinusoïdales différentes mélangées au canal discret f et supposons cette quantité connue. La TFD des observations temporelles sur la fenêtre $[t, \dots, t + N - 1]$ constitue le vecteur $\mathbf{r}^t(f)$ modélisé par :

$$\mathbf{r}^t(f) = \underbrace{\mathbf{H}(f) \mathbf{s}^t(f)}_{\mathbf{y}^t(f)} + \mathbf{b}^t(f)$$

- $\mathbf{H}(f)$ est la matrice ($n \times c$) de mélange affectée des densités spectrales des sources,
- $\mathbf{s}^t(f)$ est le vecteur ($c \times 1$) des sources normalisées,
- $\mathbf{b}^t(f)$ est le vecteur ($n \times 1$) des bruits,
- $\mathbf{y}^t(f)$ est le vecteur ($n \times 1$) des mélanges non bruités.

Pour la suite nous omettons la notation fréquentielle (f). La Décomposition en Valeurs Singulières (DVS) de \mathbf{H} peut s'écrire

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}\Lambda^{1/2}\Pi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{V} : \text{matrice unitaire } n \times c \\ \Pi : \text{matrice unitaire } c \times c \\ \Lambda^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_c}) \text{ avec } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_c > 0 \end{cases}$$

La séparation de sources consiste à déterminer la pseudo-inverse de \mathbf{H} notée $\mathbf{H}^\#$. Nous proposons d'employer une méthode orthogonale. Dans ces méthodes l'inversion s'obtient en deux étapes (voir chapitre 3). La première étape, décrite en (5.2), consiste en un blanchiment

spatial de la partie utile des signaux. La seconde étape permet ensuite de déterminer la matrice unitaire $\mathbf{\Pi}$ à partir des signaux \mathbf{x}^t .

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{W}\mathbf{r}^t = \mathbf{\Pi}\mathbf{s}^t + \mathbf{W}\mathbf{b}^t \quad \text{avec} \quad \mathbf{W} = \Lambda^{-1/2}\mathbf{V}^+ \quad (5.2)$$

Les matrices Λ et \mathbf{V} qui interviennent dans l'expression de la matrice de blanchiment, sont les éléments de la décomposition en valeurs propres (DVP) de la matrice spectrale des observations non bruitées $\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}$. En tenant compte de la normalisation des sources (les dsp des sources sont reportées multiplicativement dans les colonnes de \mathbf{H}) on a :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{yy}} = \text{E} \left[\mathbf{y}^t \mathbf{y}^{t+} \right] = \mathbf{H}\mathbf{H}^+ = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^+ \quad \text{avec} \quad \Lambda = \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2+} \quad (5.3)$$

Notons au passage que la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}$ étant de taille $(n \times n)$ sa DVP se met aussi sous la forme :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{yy}} = [\mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp] \Delta \begin{bmatrix} \mathbf{V}^+ \\ \mathbf{V}_\perp^+ \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Tout le problème consiste donc à estimer $\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}$ (de taille $n \times n$) à partir des observations bruitées. Les bruits étant centrés et décorrélés des sources, la matrice spectrale des observations, classiquement utilisée par l'Analyse en Composantes Principales s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}} = \text{E} \left[\mathbf{r}^t \mathbf{r}^{t+} \right] = \mathbf{R}_{\mathbf{yy}} + \mathbf{R}_{\mathbf{bb}}, \quad (5.4)$$

Mais ici elle ne peut être utilisée puisque les bruits n'étant pas spatialement blancs, la matrice spectrale des bruits ne peut pas s'écrire sous la forme $\sigma_b^2 \mathbf{I}_n$ où \mathbf{I}_n est la matrice identité de rang n .

Nous proposons dans le paragraphe 5.3 une ACP revisitée robuste aux bruits spatialement corrélés, adaptée aux sources temporellement corrélées. Nous montrons qu'il est possible de calculer la matrice spectrale $\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}$ exacte en fonction de Matrices Spectrales Décalées. Puisque le support de corrélation des sources est supérieur à celui des bruits, nous pourrions obtenir une matrice spectrale "débruitée" en utilisant des observations temporellement décalées. Ces Matrices Spectrales Décalées ont été définies et étudiées au chapitre précédent.

5.3 Estimation du sous-espace signal

5.3.1 Calcul de la matrice spectrale non bruitée

Le support de corrélation des sinusoides étant infini et ceux des bruits étant supposés finis, nous montrons que la matrice de blanchiment \mathbf{W} peut être estimée à l'aide des TFD des observations temporellement décalées, \mathbf{r}^t et $\mathbf{r}^{t+\tau}$. Ces observations permettent de construire des Matrices Spectrales Décalées qui ne subissent pas l'influence des bruits (voir chapitre 4).

Calculons la Matrice Spectrale Décalée des observations bruitées par :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^\tau = \text{E} \left[\mathbf{r}^t (\mathbf{r}^{t+\tau})^+ \right] = \mathbf{R}_{\mathbf{yy}}^\tau + \mathbf{R}_{\mathbf{bb}}^\tau$$

Dans cette écriture \mathbf{r}^t et $\mathbf{r}^{t+\tau}$ sont les TFD des observations temporelles sur les fenêtres débutant respectivement aux indices t et $t+\tau$. Notons τ_B le plus grand support de corrélation des composantes du vecteur bruit \mathbf{b}^t . Le support de corrélation des sinusoides étant infini, si l'on choisit un retard τ tel que $N + \tau_B < \tau$ alors \mathbf{r}^t et $\mathbf{r}^{t+\tau}$ sont issus d'échantillons de bruit décorrelés et d'échantillons de signal corrélés (voir paragraphes 4.5.2, 4.5.3 et 4.5.4). Par conséquent $\mathbf{R}_{\mathbf{bb}}^\tau$ est nulle et :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^\tau = \mathbf{R}_{\mathbf{yy}}^\tau = \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^\tau\mathbf{H}^+ \quad (5.5)$$

Notons ν_i la fréquence de la i ème source vue dans le canal d'analyse. Etant donné que les sources sont normalisées et orthogonales, $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^\tau$ est uniquement constituée d'une matrice diagonale d'exponentielles complexes dont les termes de phases dépendent des fréquences des composantes sinusoidales et du retard choisi :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^\tau = \begin{pmatrix} e^{-j2\pi\nu_1\tau} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-j2\pi\nu_c\tau} \end{pmatrix} = \theta$$

En introduisant la DVS de \mathbf{H} dans (5.5) on obtient

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^\tau = \mathbf{V}\Lambda^{1/2}\Pi\theta\Pi^+\Lambda^{1/2+}\mathbf{V}^+ \quad (5.6)$$

La matrice de phase θ évite l'élimination de la matrice unitaire Π dans $\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^\tau$. Pour retrouver la DVP de la matrice spectrale des mélanges non bruités $\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}$, ($\mathbf{R}_{\mathbf{yy}} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^+$), il est nécessaire d'utiliser plusieurs Matrices Spectrales Décalées. Nous remarquons, grâce à la forme de $\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}^\tau$, que si nous changeons le signe du retard τ , les phases changent de signe dans θ . Par ailleurs on a :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^{-\tau} = \mathbf{V}\Lambda^{1/2}\Pi\theta^{-1}\Pi^+\Lambda^{1/2+}\mathbf{V}^+ = (\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^\tau)^\# \quad (5.7)$$

où $(\cdot)^\#$ désigne la pseudo-inverse. $\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^\tau$ est une matrice $n \times n$ mais de rang c inférieur à n . Calculons une seconde Matrice Spectrale Décalée, au retard -2τ , nous avons de la même manière :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^{-2\tau} = \mathbf{V}\Lambda^{1/2}\Pi(\theta^2)^{-1}\Pi^+\Lambda^{1/2+}\mathbf{V}^+ \quad (5.8)$$

Deux retards suffisent donc pour éliminer la matrice de phases θ , quel que soit le bruit additif sur les capteurs (5.9). On a alors reconstruit exactement la matrice spectrale des mélanges non bruités.

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^\tau (\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^{\tau+})^\# \mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^{-2\tau} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^+ = \mathbf{R}_{\mathbf{yy}} \quad (5.9)$$

La DVP de la matrice \mathbf{A} permet ensuite d'estimer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$, et donc d'estimer correctement le sous-espace signal. Notons cependant que dans le calcul (5.9), l'inversion de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau+}$ est réalisée par le calcul de la pseudo-inverse en supposant le rang c connu. Lorsque le nombre de composantes sinusoïdales c est inconnu, il peut être estimé de façon robuste à l'aide de Matrices Spectrales Décalées, même en présence de bruits spatialement corrélés [FSL98]. Cette étape fera l'objet du prochain chapitre.

La matrice spectrale non bruitée estimée peut être calculée quel que soit le retard τ choisi à condition de s'affranchir du bruit. La formule donnant la matrice spectrale non bruitée en fonction des deux Matrices Spectrales Décalées de retard τ et (2.7) est toujours exacte, même si une des matrices décalées devient égale à l'identité ou si θ est proche de l'identité. Ceci peut se produire pour certaines valeurs de τ , ou pour des fréquences ν_i très proches. Les performances sont illustrées dans le paragraphe suivant à l'aide de résultats de simulations.

5.3.2 Résultats de simulation

Estimation des valeurs propres

Deux sources sont mélangées et observées sur 6 capteurs. Chaque source est la somme de 2 sinusoïdes (fréquences réduites 0.14, 0.36 pour la première source et 0.15, 0.37 pour la seconde). Il existe donc 2 canaux de mélange ou plus en raison de la "vision latérale" due à l'analyse à durée limitée. Le mélange est obtenu par des filtres AR d'ordre 1, tels que certains filtres sont passe-bas et d'autres passe-hauts. Cette situation a un intérêt par rapport à un mélange instantané car d'une part les mélanges sont différents dans les deux canaux et d'autre part pour des TFD réalisées sur peu d'échantillons les sinusoïdes ne sont plus exactement des fonctions propres des FLH. Il est important de se mettre dans la situation la plus réaliste possible. C'est aussi pour cela que nous avons défini deux canaux de mélanges alors que seul le premier sera traité. Les bruits additifs sont spatialement corrélés et sont issus du filtrage de bruits blancs par des filtres AR1. Comme nous pouvons le voir dans le tableau ci-dessous, les dsp des bruits sur chaque capteur sont très différentes bien que les RSB entre les contributions des sources et des bruits sur chaque capteur soient égaux et fixés à -5dB . Ces mesures ont été effectuées au canal de fréquence centrale réduite 0.15. Dans ce canal, les bruits additifs ne sont donc pas négligeables et ne vérifient pas les hypothèses de bruits spatialement blancs nécessaires pour utiliser l'ACP.

capteurs	dsp du bruit	RSB en dB
1	0.17	-5.01
2	0.32	-5.03
3	0.14	-5.01
4	0.21	-5.02
5	0.43	-5.00
6	0.09	-5.00

Les simulations ont été effectués sur 600 blocs de données avec un recouvrement de 16 échantillons. Les TFD ont été calculées sur 64 points et le retard τ a été choisi égal à 70.

Notons γ_Y , les valeurs propres de la matrice spectrale non bruitée \mathbf{R}_{yy} (en trait plein) et γ_1 , les valeurs propres estimées par ACP à partir de la matrice spectrale des observations \mathbf{R}_{rr} . Les valeurs propres sont tracées en fonction de la fréquence sur les figures 5.2 et 5.3. A chaque canal, nous avons 6 valeurs propres issues de la DVP de chacune des deux matrices spectrales de taille (6×6) . Nous avons donc 6 courbes pour γ_Y (dont 4 nulles puisque il n'y a que 2 sources) et 6 courbes pour γ_1 (figure 5.2). Nous pouvons remarquer que les valeurs propres estimées par ACP sont assez différentes des valeurs propres exactes. En particulier, la première valeur propre de γ_1 à la fréquence 0.15 est complètement fautive. Notons maintenant γ_2 , les valeurs propres estimées par la méthode développée au paragraphe précédent 5.3.1. Nous voyons à la figure 5.3 que les deux premières valeurs propres coïncident sur toute la bande de fréquence et que les autres sont bien proches de zéro.

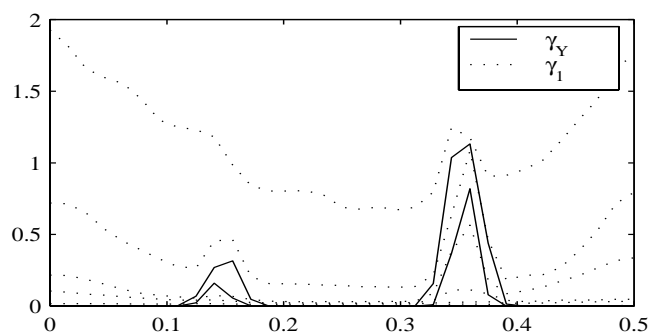


FIG. 5.2: Valeurs propres estimées par ACP et valeurs propres de \mathbf{R}_{yy}

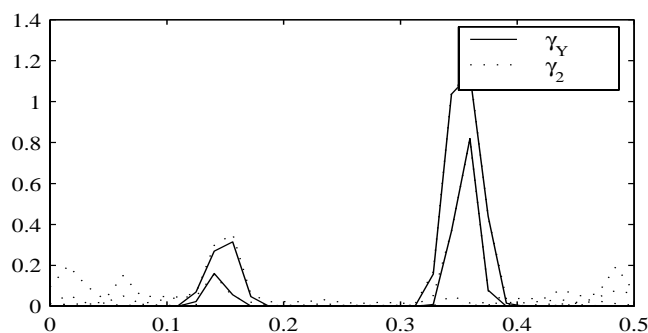


FIG. 5.3: Valeurs propres estimées par décalage et valeurs propres de \mathbf{R}_{yy}

Etude statistique

Après l'étude qualitative du paragraphe précédent, nous présentons maintenant les performances de l'estimateur de \mathbf{R}_{yy} de l'équation (5.9). Pour cela nous avons effectué des simulations de Monte-Carlo sur l'erreur relative des valeurs propres de l'estimée $\widehat{\mathbf{R}}_{yy}$ et sur la distance au sous-espace signal exact, à l'aide des vecteurs propres. Comme au paragraphe précédent, deux sources sont mélangées et observées sur 6 capteurs. Chaque source est composée d'une sinusoïde (aux fréquences réduites 0.14 et 0.15). Le mélange spectral est obtenu dans ce canal par une matrice choisie aléatoirement dans la famille des matrices réelles de taille (6×2) pseudo-inversibles dont chaque terme est uniformément réparti entre 0 et 1. Les traitements sont réalisés au canal de fréquence centrale réduite 0.15. Les matrices spectrales sont estimées sur 100 blocs de données avec un recouvrement de moitié. Les TFD ont été calculées sur 64 points et le retard τ a été choisi égal à 80. Le nombre de sources est connu et pris égal à 2. Le rapport signal à bruit est le même sur tous les capteurs. Pour les simulations de Monte-Carlo il évolue de -10dB à 10dB. Pour chaque niveau de bruit l'expérience est renouvelée 100 fois.

Nous mesurons tout d'abord la moyenne de la somme des erreurs relatives sur les deux premières valeurs propres de $\widehat{\mathbf{R}}_{yy}$ dans deux situations distinctes indexées par $k = 1, 2$:

$$E_k = \sum_{i=1}^c \left| \frac{\widehat{\lambda}_i - \lambda_i}{\lambda_i} \right|^2 \quad \text{avec ici } c = 2$$

La définition de l'erreur relative sur les valeurs propres λ_i ne permet pas d'utiliser les valeurs propres nulles.

- Dans la situation $k = 2$ les bruits additifs sont spatialement corrélés et sont issus du filtrage de bruits blancs par des filtres AR1, comme au paragraphe précédent. On trace alors (figure 5.4 courbe E2) l'indice de performance calculé par la méthode proposée en (5.9). Dans ce cas là il est impossible de comparer avec l'ACP classique qui est totalement déficiente. L'erreur relative varie de 3% (à -10 dB) à 0.5% (à 0dB). Les erreurs relatives calculées sur les termes de la matrice spectrale non bruitée estimée $\widehat{\mathbf{R}}_{yy}$ sont du même ordre. Les résultats sont très satisfaisants.
- Nous pouvons comparer les résultats avec l'ACP lorsque les bruits sont spatialement blancs (situation $k = 1$). L'erreur d'estimation, notée E1, est plus forte mais reste cependant du même ordre. Les performances deviennent très proches pour des RSB supérieurs à 5dB. Ceci montre l'aptitude de la méthode proposée à fonctionner dans toutes les situations.

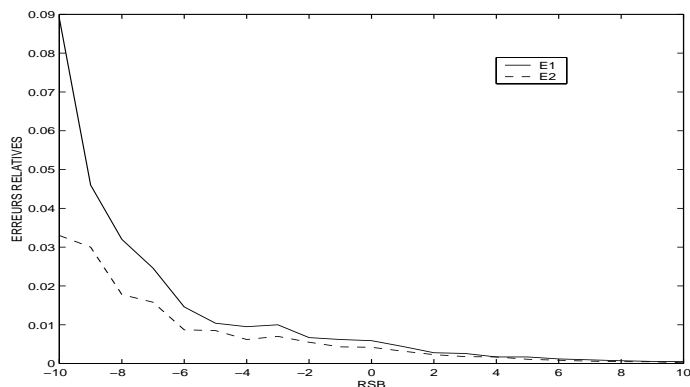


FIG. 5.4: Erreurs relatives

Nous évaluons ensuite la qualité d'estimation du sous-espace signal par la distance entre le sous-espace signal exact et le sous-espace estimé. Celui-ci est engendré par les deux premiers vecteurs propres de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ (5.9) et constituant la matrice $\widehat{\mathbf{V}}$ qui est une estimation de \mathbf{V} . D'après [GL83, p23], la distance entre deux sous-espaces \mathcal{E}_s et $\widehat{\mathcal{E}}_s$ est définie par la norme-2 matricielle de l'écart entre les projecteurs orthogonaux sur \mathcal{E}_s et $\widehat{\mathcal{E}}_s$ (5.10). En effet, le projecteur orthogonal sur un espace vectoriel est unique : il est défini par $\mathbf{V}\mathbf{V}^+$ où \mathbf{V} est une base orthonormée quelconque de cet espace. La distance entre le sous-espace signal et son estimée est donc définie par :

$$d(\mathcal{E}_s, \widehat{\mathcal{E}}_s) = \left\| \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{V}}^+ - \mathbf{V}\mathbf{V}^+ \right\|_2. \quad (5.10)$$

Elle est toujours comprise entre 0 et 1.

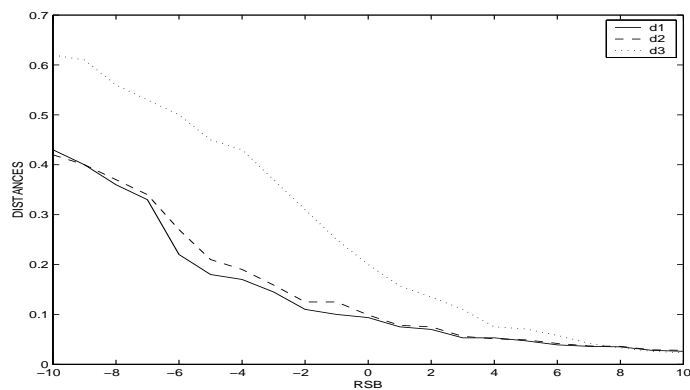


FIG. 5.5: Distances entre sous-espaces

Nous avons tracé sur la figure (5.5) la distance entre le sous-espace signal exact et le sous-espace signal estimé :

- par la méthode à décalage (5.9) pour des bruits spatialement corrélés (distance d1),
- par ACP (voir partie 1) pour des bruits spatialement corrélés (distance d3),
- par ACP (voir partie 1) pour des bruits spatialement blancs (distance d2).

Nous voyons que les résultats de d1 et d3 ne coïncident que pour des RSB forts (supérieurs ou égaux à 8dB). Nous voyons que d1 et d2 sont très proches, d1 étant même légèrement inférieure à l'ACP lorsque le modèle de bruits spatialement blancs est vérifié. Ceci montre la performance de la méthode proposée pour des bruits spatialement corrélés et la limitation de l'ACP dans ce contexte.

Lorsque la matrice des vecteurs propres \mathbf{V} est mal estimée, la projection des observations bruitées se fait sur un sous-espace erroné dont la distance au vrai sous-espace a été mesurée précédemment. Ceci génère alors deux problèmes :

- le modèle après blanchiment n'est plus égal à :

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{\Pi} \mathbf{s}^t + \mathbf{W} \mathbf{b}^t \quad \text{avec} \quad \mathbf{W} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{V}^+ \quad (5.11)$$

où la matrice $\mathbf{\Pi}$ est une matrice unitaire de taille ($c \times c$). Ceci engendre donc par la suite des erreurs dans l'estimation de $\mathbf{\Pi}$.

- l'augmentation du Rapport Signal à Bruit global est moins importante.

On comprend alors l'intérêt de bien réaliser cette première étape car les erreurs d'estimation peuvent difficilement être corrigées lors de la seconde étape. Elles seront plutôt amplifiées. Etudions maintenant la seconde étape.

5.4 Transformation Orthogonale

Nous avons vu dans la première partie que dans le cas d'un mélange instantané non bruité, la transformation orthogonale $\mathbf{\Pi}$ peut être estimée à l'aide de statistiques d'ordres supérieurs à deux. Son estimation peut être obtenue en maximisant une mesure d'indépendance ou fonction de contraste entre les sources estimées (voir chapitre 3). Lorsque les sources sont temporellement corrélées, $\mathbf{\Pi}$ est identifiable en absence de bruit à l'aide de statistiques d'ordre deux [BAMCM97] en diagonalisant des matrices d'intercorrélations. Dans le cas où les bruits sont gaussiens, une fonction de contraste utilisant des cumulants d'ordre 4 peut être exploitée [RL89] [Car90] [CS93] [Com90] [Com94b] [GL90] [Sou93]. En effet ceux-ci s'affranchissent théoriquement totalement du bruit gaussien.

Lorsque les bruits ne sont pas gaussiens ou lorsque les niveaux de bruits sont élevés, ces techniques génèrent des erreurs d'estimation importantes. Dans le cas d'un mélange spectral, nous montrons que lorsque les supports de corrélation des sources sont supérieurs à ceux des bruits, il est possible d'estimer Π à l'aide de statistiques d'ordre deux. Nous développons une méthode spectrale proche de [BAMCM97] qui diagonalise une ou plusieurs Matrice(s) Spectrale(s) Décalée(s) à chaque canal fréquentiel au lieu d'un ensemble de matrices d'inter-corrélations.

Lorsque les supports de corrélation des sources sont supérieurs à ceux des bruits, nous avons vu comment estimer la matrice de blanchiment $\mathbf{W} = \Lambda^{-1/2}\mathbf{V}^+$ par DVP de \mathbf{A} (5.9). Après projection sur les c premiers vecteurs propres et normalisation, nous obtenons le vecteur d'observations \mathbf{x}^t de taille c .

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{W}\mathbf{r}^t \quad \text{avec} \quad \mathbf{W} = \Lambda^{-1/2}\mathbf{V}^+ \quad (5.12)$$

$$\mathbf{x}^t = \Pi\mathbf{s}^t + \mathbf{W}\mathbf{b}^t \quad (5.13)$$

où la matrice Π est une matrice unitaire de taille $(c \times c)$.

Soient les vecteurs \mathbf{x}^t et $\mathbf{x}^{t+\tau}$ obtenus par blanchiment à l'ordre deux des vecteurs \mathbf{r}^t et $\mathbf{r}^{t+\tau}$. Si τ est supérieur au support de corrélation des bruits, leur Matrice Spectrale Décalée ne subit pas l'influence des bruits :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^\tau = \mathbb{E} \left[\mathbf{x}^t (\mathbf{x}^{t+\tau})^+ \right] = \Pi \theta(\tau) \Pi^+ \quad (5.14)$$

$\theta(\tau)$ est la Matrice Spectrale Décalée des TFD des sources :

$$\theta(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-j2\pi\nu_1\tau} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-j2\pi\nu_c\tau} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Pour obtenir ce résultat, si les TFD sont effectuées sur N échantillons, il faut avoir $(\tau > N + \tau_B)$ où τ_B est la plus grande durée de corrélation des bruits.

Dans la relation (5.14), on constate que Π est la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^\tau$ sous la condition que les termes diagonaux de la matrice θ soient différents. Les termes diagonaux sont proportionnels à $[e^{-2\pi j(\frac{f}{N}-\nu_1)\tau}, \dots, e^{-2\pi j(\frac{f}{N}-\nu_c)\tau}]$ où ν_1, \dots, ν_c sont les fréquences réduites des composantes sinusoïdales présentes dans le signal au canal f . Ces termes ne dépendent que des écarts en fréquence réduite des composantes. L'influence de τ est identique en basse et haute fréquence. Les termes sont périodiques en τ , de période $(T_i = \frac{1}{|\frac{f}{N}-\nu_i|})$. Pour certains retards τ et certaines fréquences ν_i , il est possible qu'un terme soit égal à 1. On évite ce problème en diagonalisant de manière conjointe plusieurs Matrices Spectrales Décalées telles que les Matrices Spectrales Décalées des sources $\theta(\tau)$ soient différentes. Ceci permet en outre d'augmenter la robustesse de l'estimation [BAMCM97].

Dans un canal de fréquence, $\left(\left|\frac{f}{N} - \nu_i\right|\right)$ est inférieur à $(1/N)$ et donc T_i strictement supérieur à N . Si on utilise deux Matrices Spectrales Décalées de retards $(\tau' = \tau)$ et $(\tau' = \tau + N)$, alors les deux termes $e^{-2\pi j(\frac{f}{N} - \nu_i)\tau'}$ seront différents et ne peuvent être égaux à 1 tous les deux. Ce critère simple permet d'obtenir efficacement la matrice Π .

La séparation est achevée par la projection :

$$\mathbf{a}^t = \Pi^+ \mathbf{x}^t = \mathbf{s}^t + \mathbf{v}^t \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{v}^t = \mathbf{H}^\# \mathbf{b}^t \\ \mathbf{H}^\# = \Pi^+ \Lambda^{-1/2} \mathbf{V}^+ \end{cases} \quad (5.16)$$

La DVP de $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^\tau$ donne Π à une matrice complexe de permutation près $\hat{\Pi} = \Pi \mathbf{P}$. Nous avons alors achevé l'identification de la pseudo inverse de la matrice de mélange. Le résultat de cette séparation est le vecteur \mathbf{a}^t , de taille c . Dans le cas où la séparation est parfaite, les sorties \mathbf{a}^t sont constituées chacune d'une source s_i^t et d'une composante de bruit v_i^t . La matrice de covariance des bruits est égale à $\mathbf{R}_{\mathbf{vv}}$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{vv}} = \mathbb{E} \left[\mathbf{v}^t \mathbf{v}^{t+} \right] = \mathbf{H}^\# \mathbf{R}_{\mathbf{bb}} (\mathbf{H}^\#)^+ = \Pi^+ \Lambda^{-1/2} \mathbf{V}^+ \mathbf{R}_{\mathbf{bb}} \mathbf{V} \Lambda^{-1/2} \Pi \quad (5.17)$$

Les composantes de bruit sont corrélées puisque la matrice $\mathbf{H}^\#$ ne diagonalise pas la matrice spectrale des bruits, quelle que soit la matrice de corrélation des bruits originels $\mathbf{R}_{\mathbf{bb}}$ sur les capteurs. Nous montrons dans le prochain paragraphe comment utiliser la corrélation des composantes de bruit pour augmenter le rapport signal à bruit.

Pour mesurer la qualité de l'estimation de la matrice Π en contexte bruité, nous avons tracé le taux de réjection après séparation. On définit le taux de réjection I_{pq} [Car96] comme étant la puissance relative de la q ème source dans l'estimée de la p ème source. Nous avons simulé le modèle (5.13) en supposant un blanchiment exact. Les paramètres de simulations sont les mêmes que précédemment (2 sources, 6 capteurs, bruits spatialement corrélés). Nous avons comparé les performances avec l'algorithme JADE qui s'affranchit du bruit gaussien en exploitant des cumulants d'ordre 4 des observations [Sou93]. Nous présentons les taux de réjection moyens

$$TRM = moy_i \left(moy_{k \neq i} \left(\frac{|\mathbf{G}_{ik}|^2}{|\mathbf{G}_{ii}|^2} \right) \right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{G} = \hat{\Pi}^+ \Pi$$

calculés pour des rapports signal à bruit compris entre -10dB et 10dB :

- entre les sources estimées par diagonalisation de la quadricovariance JADE (I1),
- entre les sources estimées par diagonalisation d'une Matrice Spectrale Décalée (I2).

Pour comparer avec JADE, les bruits additifs ont été pris gaussiens. Le nombre de moyennes indépendantes (ici égal à 100) n'est pas assez grand pour que l'influence des bruits additifs soit négligeable. La méthode n'exploitant que des statistiques d'ordre 2 est nettement plus performante. Les résultats sont du même ordre pour des RSB forts de l'ordre de 7dB.

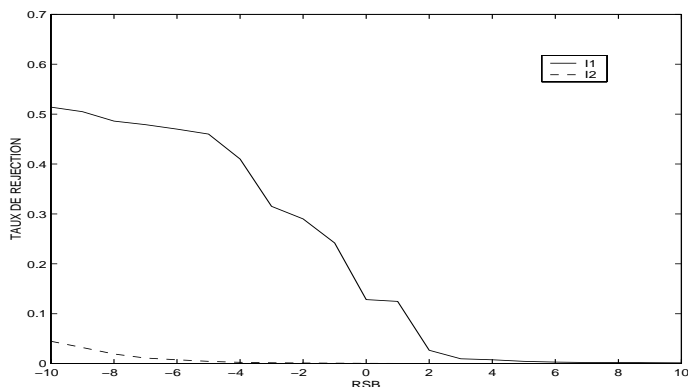


FIG. 5.6: Taux de réjection

5.5 Réduction de bruit

La séparation de sources telle que nous l'avons envisagée jusqu'à présent vise à estimer au mieux les sources sans se préoccuper des bruits. Les estimées bruitées ainsi obtenues ne sont pas toujours d'une grande utilité. Lorsque le RSB des observations est faible il peut être judicieux de faire des concessions sur la qualité de la séparation en contrepartie d'une réduction de bruit efficace. Le critère de séparation adopté est celui de la maximisation du Rapport Signal à Bruit ou du Rapport Signal à Bruit plus Interférences. Ce critère conduit à réaliser successivement une étape de séparation classique suivie d'une étape de réduction de bruit sur chacune des sorties à l'aide des autres sorties. Pour améliorer le dispositif nous proposons d'ajouter des références de bruit supplémentaires lorsque le nombre de capteur est supérieur au nombre de composantes sources. Comme précédemment les traitements sont effectués dans chaque canal de fréquence. La réduction de bruit est mise en oeuvre par un filtre de Wiener multi-références sous forme d'algorithme bloc. Nous présentons les performances du réducteur de bruit dans des situations où la réduction de bruit est presque parfaite.

5.5.1 Projections sur les sous-espaces signal et bruit

Dans le cas où le nombre de capteurs n est supérieur au nombre de composantes sinusoïdales c , nous avons vu qu'une première étape de projection sur les sous-espaces signal et bruit (Analyse en Composantes Principales) permettait de séparer l'information totale sur les sources et les bruits en c sorties contenant à la fois les sources et les bruits. Une deuxième étape d'identification de la matrice de mélange permet de séparer les sources dans ces c sorties. Nous avons alors c voies ne contenant qu'une seule source, différente d'une sortie à l'autre, additivement bruitée par des composantes de bruits spatialement corrélées

L'intérêt de la première étape de blanchiment est d'augmenter le rapport signal à bruit en gardant toute l'information sur les c sinusoïdes dans c sorties après blanchiment (projection des observations \mathbf{r}^t sur le sous-espace signal et normalisation par $\Lambda^{-1/2}$). L'identification et la séparation sont ainsi plus performantes qu'une séparation directe à partir des signaux fortement bruités. La projection de \mathbf{r}^t sur l'espace complémentaire ($\mathbf{V}_\perp \mathbf{r}^t$), noté \mathbf{x}_\perp^t , élimine totalement les sources et ne contient que des combinaisons des bruits :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^t &= \Pi \mathbf{s}^t + \mathbf{W} \mathbf{b}^t \\ \mathbf{x}_\perp^t &= \underbrace{\mathbf{V}_\perp^+ \mathbf{V} \Lambda^{1/2}}_0 \Pi \mathbf{s}^t + \mathbf{V}_\perp^+ \mathbf{b}^t = \mathbf{V}_\perp^+ \mathbf{b}^t\end{aligned}\tag{5.18}$$

L'information totale sur les sources et les bruits est donc contenue dans les n signaux \mathbf{a}^t et \mathbf{x}_\perp^t de taille respectivement $(c \times 1)$ et $(n - c) \times 1$. Il est alors possible d'utiliser les $(n - c)$ dernières voies comme références-bruit-seul pour débruiter au mieux les c premières sorties.

Le critère utilisé ici est de maximiser la puissance de la source estimée sur chaque voie, vis-à-vis du bruit sur cette sortie. Nous allons le détailler au paragraphe suivant.

5.5.2 Séparation de sources par maximisation du RSB des estimées

La présence de bruits corrélés sur toutes les sorties du séparateur implique que les composantes du vecteur \mathbf{a}^t sont corrélées entre elles et corrélées avec les composantes de \mathbf{x}_\perp^t . Regroupons tous ces signaux dans un même vecteur \mathbf{z}^t :

$$\mathbf{z}^t = \left[(\mathbf{a}^t)^T, (\mathbf{x}_\perp^t)^T \right]^T$$

A l'aide de ces signaux, nous cherchons à améliorer le rapport signal à bruit par rapport à une source s_i^t . Deux stratégies sont envisageables : soit utiliser seulement les $(n - c)$ dernières voies pour maximiser le Rapport Signal à Bruit entre la source s_i^t et les composantes de bruit, soit utiliser toutes les voies et maximiser le Rapport Signal à Bruit plus Interférences entre la source s_i^t et les autres sources plus les composantes de bruit [Che95]. Dans le deuxième cas, le RSB obtenu sera théoriquement plus grand puisque les $(n - c)$ dernières voies ne seront utilisées que si leur corrélation permet de faire diminuer la puissance du résidu (autres sources et bruits). En revanche, ce traitement va ajouter un résidu des autres sources (ou interférences), ce qui peut être gênant dans certaines applications.

Si l'identification de $\mathbf{H}^\#$ est parfaite, les c premières voies de \mathbf{z}^t , notées z_i^t , ne contiennent qu'une seule source s_i^t et une composante de bruit v_i^t .

$$z_i(t) = s_i^t + v_i^t, \quad i = 1, \dots, c \quad (5.19)$$

De manière à obtenir c sources "débruitées" \widehat{s}_i^t , nous cherchons un filtrage linéaire des $(n-1)$ autres voies tels que :

$$\widehat{s}_i^t = z_i^t - \widehat{v}_i^t, \quad i = 1, \dots, c$$

où \widehat{v}_i^t est l'estimée de la i ème composante de bruit ($1 \leq i \leq c$). Elle est obtenue par une combinaison linéaire des $(n-1)$ composantes restantes de \mathbf{z}^t , à l'aide des coefficients complexes F_k :

$$\widehat{v}_i^t = \sum_{k \neq i} F_k z_k^t = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z}_{-i}^t \quad (5.20)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{-i}^t &= [z_1^t, \dots, z_{i-1}^t, z_{i+1}^t, \dots, z_n^t]^T \\ \mathbf{F} &= [F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_n]^T \end{aligned}$$

Le fait d'utiliser les $(c-1)$ sorties de la séparation de sources va remélanger les sources et il faut donc déterminer un filtre qui maximise la puissance de la source s_i^t , vis-à-vis du résidu d'énergie des autres sources et du bruit sur la sortie \widehat{s}_i^t . C'est le filtre qui maximise le Rapport Signal à Bruit plus Interférences pour la source i :

\widehat{s}_i^t s'écrit aussi :

$$\widehat{s}_i^t = s_i^t + v_i^t - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z}_{-i}^t = s_i^t + v_i^t - \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{s}_{-i}^t + \mathbf{v}_{-i}^t) \quad i = 1, \dots, c$$

Le filtre que nous cherchons doit maximiser :

$$RSBI_{s_i} = \frac{R_{s_i s_i}}{P_{-i}}$$

où P_{-i} est la puissance du résidu des autres sources et des bruits : $v_i^t - \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{s}_{-i}^t + \mathbf{v}_{-i}^t)$. Maximiser $RSBI_{s_i}$ par rapport aux coefficients du filtre \mathbf{F} est équivalent à minimiser P_{-i} , c'est à dire à minimiser la puissance de $(v_i^t - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z}_{-i}^t)$.

- Si la séparation est parfaite, s_i^t est décorrélé de $(v_i^t - \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{s}_{-i}^t + \mathbf{v}_{-i}^t))$ et minimiser $(v_i^t - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z}_{-i}^t)$ équivaut à minimiser $(s_i^t + v_i^t - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z}_{-i}^t)$. Le filtre \mathbf{F} doit donc tout simplement minimiser la puissance de $(s_i^t = z_i^t - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z}_{-i}^t)$.
- Si la séparation est imparfaite, en cherchant à minimiser le $RSBI$ on risque de perdre certaines sources et d'avoir en contre partie plusieurs fois la même source en sortie.

Nous reconnaissons un filtre de Wiener classique qui minimise l'Erreur Quadratique Moyenne [Wie49] :

$$\mathbb{E} \left[\left| z_i^t - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z}_{-i}^t \right|^2 \right]_{\min}$$

Puisque les sources sont supposées décorréées, le résultat est un système de soustraction de bruit multi-références dont l'observation est z_i^t et les références-bruit sont les autres sorties z_{-i}^t [JGC89].

Filtre de Wiener multi-références

La présence de bruits corrélés sur toutes les sorties du séparateur implique que les composantes du vecteur \mathbf{a}^t sont corrélées entre elles et corrélées avec les composantes de \mathbf{x}_\perp^t . De fait, le RSB relatif à chaque composante du vecteur \mathbf{a}^t peut être maximisé par un filtre de Wiener dont les références bruit sont les $(c-1)$ composantes restantes de \mathbf{a}^t et les $(n-c)$ composantes de \mathbf{x}_\perp^t . L'estimation est obtenue par une combinaison linéaire des $(n-1)$ composantes restantes de \mathbf{z}^t à l'aide des coefficients complexes F_k du filtre de Wiener qui minimise l'Erreur Quadratique Moyenne :

$$\widehat{v}_i^t = \sum_{k \neq i} F_k z_k^t = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z}_{-i}^t \text{ tel que } \mathbb{E} \left[\left| v_i^t - \widehat{v}_i^t \right|^2 \right]_{\min} \quad (5.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{-i}^t &= [z_1^t, \dots, z_{i-1}^t, z_{i+1}^t, \dots, z_n^t]^T \\ \mathbf{F} &= [F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_n]^T \end{aligned}$$

Le théorème de la projection orthogonale indique que la meilleure estimée au sens de l'EQM minimale est celle dont l'erreur est orthogonale à tout vecteur de l'espace des observations :

$$\begin{aligned} (5.21) &\iff \left(v_i^t - \widehat{v}_i^t \right) \perp z_q^t && q \neq i \\ &\iff \mathbb{E} \left[\left(v_i^t - \widehat{v}_i^t \right) \cdot z_q^{t*} \right] = 0 && q \neq i \\ &\iff \mathbb{E} \left[v_i^t \cdot z_q^{t*} \right] = \mathbf{F}^T \cdot \mathbb{E} \left[\mathbf{z}_{-i}^t \cdot z_q^{t*} \right] && q \neq i \end{aligned}$$

ce qui peut encore se mettre sous forme matricielle :

$$\mathbf{R}_{v_i \mathbf{z}_{-i}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i} \mathbf{z}_{-i}}$$

avec

$$\mathbf{R}_{v_i \mathbf{z}_{-i}} = \mathbb{E} \left[v_i^t \cdot \mathbf{z}_{-i}^{t+} \right] \quad (5.22)$$

et

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i}\mathbf{z}_{-i}} = \mathbf{E} \left[\mathbf{z}_{-i}^t \cdot \mathbf{z}_{-i}^{t+} \right] \quad (5.23)$$

En remarquant que $\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i}\mathbf{z}_{-i}}^T = \mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i}\mathbf{z}_{-i}}^*$ le filtre de Wiener s'écrit finalement :

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i}\mathbf{z}_{-i}}^* \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}_{v_i\mathbf{z}_{-i}}^T \quad (5.24)$$

Soustraction du bruit

Dans l'expression des coefficients (5.24) on a besoin de la matrice d'intercorrélation $\mathbf{R}_{v_i\mathbf{z}_{-i}}$ mais elle n'est pas accessible puisque l'on cherche justement v_i . On a donc besoin d'une observation supplémentaire ; l'observation de la i ème voie :

$$z_i = \hat{s}_i + v_i.$$

Le RSB en entrée est

$$RSB_{\text{entrée}} = \frac{R_{\hat{s}_i\hat{s}_i}}{R_{v_i v_i}}$$

La soustraction de bruit s'écrit :

$$\tilde{s}_i = z_i - \hat{v}_i$$

Calculons

$$\eta^2 = \mathbf{E} \left[|\tilde{s}_i|^2 \right] = \mathbf{E} \left[|z_i - \hat{v}_i|^2 \right] = \mathbf{E} \left[|\hat{s}_i + v_i - \hat{v}_i|^2 \right]$$

Les \hat{s}_i et les v_i sont indépendants et centrés donc

$$\eta^2 = \mathbf{E} \left[|\hat{s}_i|^2 \right] + \mathbf{E} \left[|v_i - \hat{v}_i|^2 \right] = R_{\hat{s}_i\hat{s}_i} + \varepsilon^2. \quad (5.25)$$

où :

$$\varepsilon^2 = \mathbf{E} \left[|v_i - \hat{v}_i|^2 \right] \quad (5.26)$$

Minimiser η^2 revient à minimiser ε^2 donc on peut utiliser la nouvelle observation :

$$\mathbf{R}_{v_i\mathbf{z}_{-i}} = \mathbf{E} \left[(z_i - \hat{s}_i) \cdot \mathbf{z}_{-i}^* \right] = \mathbf{R}_{z_i\mathbf{z}_{-i}}.$$

Dans ces conditions le filtre de Wiener s'écrit :

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i}\mathbf{z}_{-i}}^* \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}_{z_i\mathbf{z}_{-i}}^T \quad (5.27)$$

et l'estimée du bruit :

$$\hat{v}_i = \mathbf{z}_{-i}^T \cdot \left(\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i}\mathbf{z}_{-i}}^* \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}_{z_i\mathbf{z}_{-i}} \quad (5.28)$$

Calcul du RSB

Nous montrons ici que le traitement a permis de faire augmenter le RSB. Le RSB en sortie s'obtient par :

$$RSB_{sortie} = \frac{R_{\hat{s}_i \hat{s}_i}}{\varepsilon_{\min}^2} > RSB_{entrée} \text{ car } \varepsilon_{\min}^2 < R_{v_i v_i} \quad (5.29)$$

En effet, la solution optimale de Wiener donne l'EQM minimale :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\min}^2 &= \mathbb{E}[(v_i - \hat{v}_i) \cdot v_i^*] - \underbrace{\mathbb{E}[(v_i - \hat{v}_i) \cdot \hat{v}_i^*]}_0 \\ \varepsilon_{\min}^2 &= R_{v_i v_i} - \mathbb{E}[v_i^* \cdot \mathbf{z}_{-i}^T \cdot \mathbf{W}] = R_{v_i v_i} - \underbrace{\mathbf{R}_{v_i \mathbf{z}_{-i}}^+ \cdot \left(\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i} \mathbf{z}_{-i}}^*\right)^{-1} \cdot \mathbf{R}_{v_i \mathbf{z}_{-i}}}_{\text{scalaire} > 0} \end{aligned} \quad (5.30)$$

et le gain en terme de RSB est donné par :

$$G_i = \frac{RSB_{sortie}}{RSB_{entrée}} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{R}_{v_i \mathbf{z}_{-i}}^+ \cdot \left(\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i} \mathbf{z}_{-i}}^*\right)^{-1} \cdot \mathbf{R}_{v_i \mathbf{z}_{-i}}}{R_{v_i v_i}}}$$

Prenons l'exemple de deux sources. On suppose que l'on traite la voie $i = 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{-i}^T &\equiv z_2 \\ \left(\mathbf{R}_{\mathbf{z}_{-i} \mathbf{z}_{-i}}^*\right)^{-1} &\equiv \frac{1}{R_{z_2 z_2}} = \frac{1}{R_{\hat{s}_2 \hat{s}_2} + R_{v_2 v_2}} \\ \mathbf{R}_{v_i \mathbf{z}_{-i}} &\equiv R_{v_1 z_2} = R_{z_1 z_2} = R_{v_1 v_2} \\ \mathbf{W} &\equiv W_1 = \frac{R_{z_1 z_2}}{R_{z_2 z_2}} = \frac{R_{v_1 v_2}}{R_{\hat{s}_2 \hat{s}_2} + R_{v_2 v_2}} \\ \hat{v}_1 &= W_1 \cdot z_2 \\ \varepsilon_{\min}^2 &= R_{v_1 v_1} - \frac{|R_{v_1 v_2}|^2}{R_{\hat{s}_2 \hat{s}_2} + R_{v_2 v_2}} \\ RSB_{entrée} &= \frac{R_{\hat{s}_1 \hat{s}_1}}{R_{v_1 v_1}} \\ RSB_{sortie} &= \frac{R_{\hat{s}_1 \hat{s}_1}}{R_{v_1 v_1} - \frac{|R_{v_1 v_2}|^2}{R_{\hat{s}_2 \hat{s}_2} + R_{v_2 v_2}}} \\ Gain_{\frac{sortie}{entrée}} &= \frac{1}{1 - \frac{|R_{v_1 v_2}|^2}{R_{\hat{v}_1 \hat{v}_1} \cdot (R_{\hat{s}_2 \hat{s}_2} + R_{v_2 v_2})}} \end{aligned}$$

Les performances sont dégradées par la présence de la source \hat{s}_2 dans la référence puisqu'elle n'est pas corrélée avec le bruit. Il serait meilleur d'avoir une référence bruit seul.

Une étude [JGC89] sur le filtrage de Wiener multi-références a montré qu'il était préférable d'utiliser les références les plus corrélées au bruit. Si la cohérence est trop faible, l'erreur d'estimation du filtre risque d'engendrer un signal d'erreur plus grand (en puissance) que le gain obtenu par l'élimination de bruit [GC90]. Si le nombre de capteurs accessibles est supérieur au nombre de sources, il est préférable de n'utiliser que des références bruit-seul. Les projections sur le sous-espace signal seront plus cohérentes avec la voie à traiter que les $(c - 1)$ composantes restantes de \mathbf{a}^t puisque la présence des sources décorréelées entre elles fait diminuer la cohérence. Un seuil sur la cohérence estimée est calculé dans [Com85]. La cohérence limite dépend des erreurs d'estimation et donc du moyennage.

5.6 Résultats de simulation

Trois fréquences pures proches filtrées par des filtres AR1 sont reçues sur cinq capteurs. Les observations sont perturbées par cinq bruits obtenus par mélange instantané d'un bruit blanc gaussien et d'un bruit blanc uniforme. Les TFD sont calculées sur des blocs de 64 échantillons fournissant une résolution de $\frac{1}{64} \approx 0.016$ en fréquence réduite. Les fréquences réduites des sources étant $\nu_1 = 0.10$, $\nu_2 = 0.11$ et $\nu_3 = 0.12$, une analyse spectrale à cette résolution ne permet pas de les dissocier. Les traitements sont réalisés au canal f de fréquence centrale $\frac{f}{N} = 0.11$ pour un Rapport Signal à Bruit global de 0dB. Les matrices spectrales sont estimées sur 900 blocs. Le retard τ est de 67 échantillons. Le nombre de sources est connu.

La qualité d'estimation de la matrice de décorrélation est mesurée par la matrice \mathbf{E} des erreurs relatives sur les composantes de $\widehat{\mathbf{W}}$:

$$\mathbf{E} = (E_{ik}) \quad \text{avec} \quad E_{ik} = \left| \frac{\widehat{W}_{ik} - W_{ik}}{W_{ik}} \right|$$

On obtient

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0.027 & 0.017 & 0.080 & 0.015 & 0.412 \\ 0.021 & 0.064 & 0.049 & 0.022 & 0.035 \\ 0.056 & 0.024 & 0.063 & 0.097 & 0.039 \end{pmatrix}$$

Ces erreurs relatives sont faibles pour un tel contexte de bruit.

La qualité d'estimation de Π est mesurée par la matrice $\mathbf{Q} = \Pi^+ \widehat{\Pi}$. Lorsque l'estimation est parfaite, \mathbf{Q} est une matrice de permutation (voir paragraphe 5.4). Ici on obtient

$$(|Q_{ij}|) = \begin{pmatrix} 0.015 & 1.002 & 0.028 \\ 0.028 & 0.013 & 1.067 \\ 0.991 & 0.014 & 0.020 \end{pmatrix}$$

La 1ère source est sur la 3ème sortie (0.991), la 2ème source est sur la 1ère sortie (1.002) et la 3ème source est sur la 2ème sortie (1.067).

Les figures 5.7, 5.8 et 5.9 donnent les enveloppes des sources initiales à retrouver. La figure 5.10 donne l'enveloppe de l'observation bruitée de l'un des capteurs.

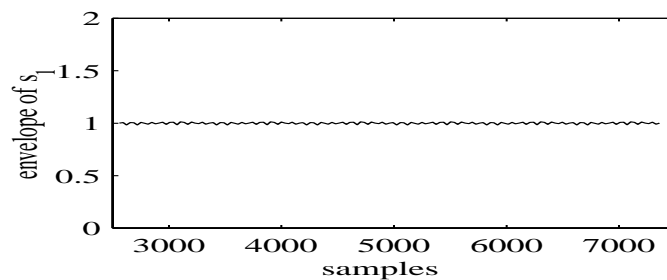


FIG. 5.7: Enveloppe de la 1ère source

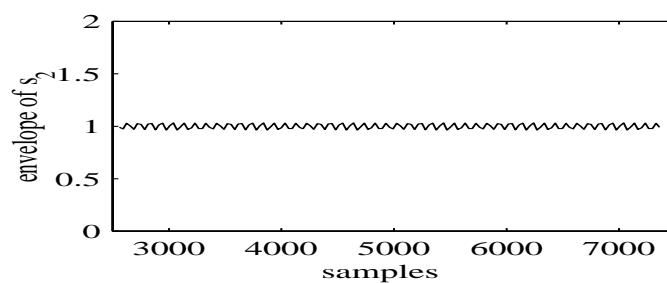


FIG. 5.8: Enveloppe de la 2ème source

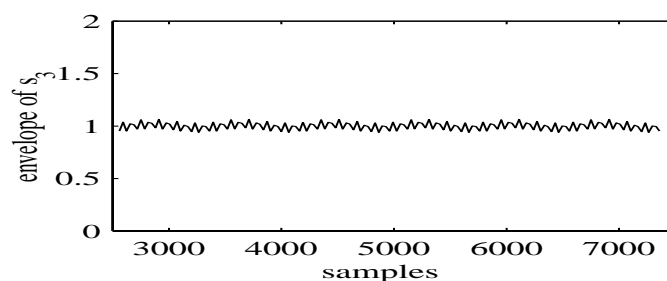


FIG. 5.9: Enveloppe de la 3ème source

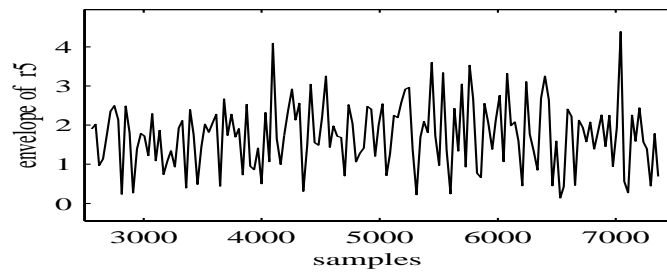


FIG. 5.10: Enveloppe d'une observation bruitée

Le RSB est de 0dB. Après séparation (étapes 5.5.1 et 5.4) les sorties \mathbf{a}^t contiennent chacune une source estimée et du bruit. L'enveloppe de l'une de ces sorties est donnée à la figure 5.11. Le RSB est d'environ 6dB. Les figures 5.12, 5.13 et 5.14 donnent les enveloppes des sources estimées débruitées.

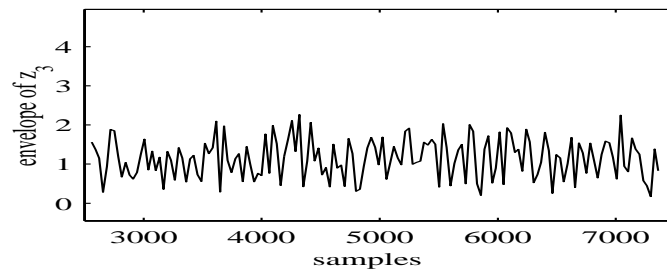


FIG. 5.11: Enveloppe d'une source estimée bruitée

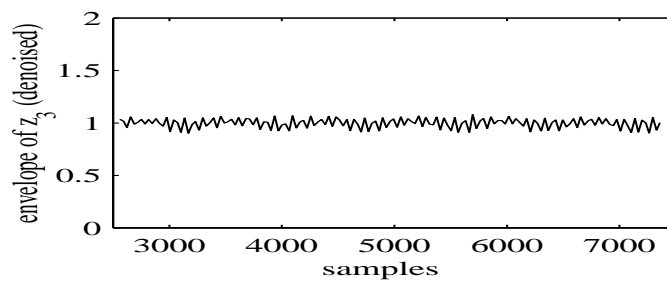


FIG. 5.12: Enveloppe de la 1ère source estimée

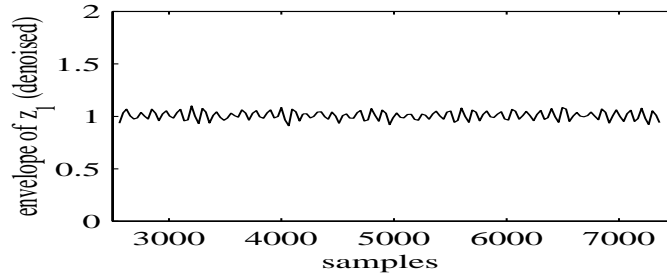


FIG. 5.13: Enveloppe de la 2ème source estimée

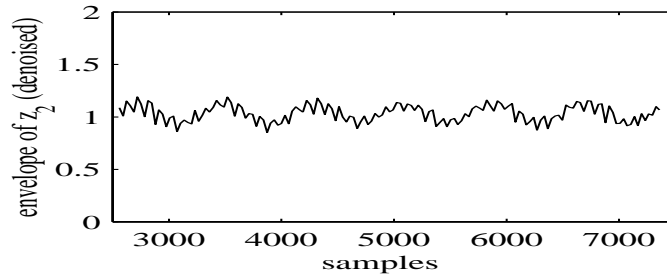


FIG. 5.14: Enveloppe de la 3ème source estimée

Dans le cas de la deuxième source, le Rapport Signal à Bruit est égal à 25dB. On remarque que les deux premières sources sont bien estimées. Les enveloppes ne contiennent pas de battements, significatifs d'interférences avec une sinusoïde de fréquence différente. La troisième source est moins bien estimée mais le RSB est néanmoins de 15dB.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la séparation de sources à spectre de raies observées au sein d'un mélange convolutif bruité. Nous proposons une technique fréquentielle basée sur des statistiques d'ordre deux des observations temporellement décalées. Nous obtenons ainsi des matrices spectrales "débruitées", à condition que les supports de corrélation des bruits soient inférieurs à ceux des sources. Cette méthode est applicable bien que les bruits soient spatialement et temporellement corrélés. En dernier lieu, une étape de réduction de bruit est mise en oeuvre. Le débruitage dans le domaine fréquentiel permet de maximiser le RSB dans chaque canal fréquentiel quelle que soit la dynamique fréquentielle des signaux. Dans chaque canal les références bruit qui ne sont pas suffisamment cohérentes avec la voie à débruitier sont rejetées, alors qu'un traitement temporel ne permettrait pas de faire cela. La contrepartie est que la complexité de calcul est multipliée par le nombre de canaux fréquentiels à traiter. La méthode donne des résultats satisfaisants dans un canal fréquentiel où le RSB est de 0 dB. L'étape de réduction de bruit est très efficace en raison du nombre et de la qualité des références disponibles.

Chapitre 6

Estimation du nombre de sources

6.1 Introduction

De nombreuses méthodes de séparation nécessitent la connaissance du nombre de sources. Les techniques orthogonales, en particulier, sont sensibles aux erreurs sur la dimension du sous-espace signal. Dans le cas du modèle spectral, il faut estimer le nombre de composantes indépendantes dans chaque bande de fréquences. L'estimation doit être fiable et robuste aux bruits. Ce point est crucial pour les mélanges à spectres de raies au sein desquels le nombre de composantes est variable d'une bande à l'autre. Toutes les méthodes qui sont présentées dans ce chapitre exploitent des matrices de covariance. Ces matrices recèlent l'information statistique à l'ordre deux sur les signaux et l'information géométrique sur la propagation.

Nous rappelons au paragraphe 6.2 qu'estimer le nombre de sources revient à estimer le rang de la matrice de covariance des mélanges non bruités à partir des mélanges bruités. Des hypothèses sur la matrice de covariance des bruits, ou sur la nature des bruits, sont nécessaires pour résoudre le problème. Le paragraphe 6.3 reprend les critères classiques dont la plupart exploitent l'information statistique fournie par les valeurs propres de la matrice de covariance. C'est le cas, par exemple, des critères AIC (Akaike Information Criteria) et MDL (Maximum Description Length) [Sch78]. Ce sont des techniques du Maximum de Vraisemblance qui supposent que les bruits sont gaussiens et spatialement blancs. Nous rappelons les résultats généraux sur la théorie de la perturbation. Ceux-ci indiquent que les valeurs propres sont peu stables lorsque la matrice de corrélation des bruits s'écarte du modèle. Ceci nous conduit à l'idée directrice de méthodes plus récentes fondées sur la variable instrumentale [SC97] ou sur la recherche de deux sous-espaces stables [Kol94] dans la DVP de la matrice de covariance.

Pour s'assurer de la robustesse vis-à-vis des bruits, nous proposons d'estimer une matrice de covariance épurée de la corrélation statistique des bruits et d'exploiter ses vecteurs singuliers. En supposant que le support de corrélation des bruits est inférieur à celui des sources, on estime, à l'aide d'observations temporellement décalées, une matrice spectrale "débruitée". Il s'agit de la "Matrice Spectrale Décalée" introduite au chapitre 4. Sa DVS fournit une matrice diagonale de valeurs singulières et deux matrices distinctes de vecteurs propres. En présence

de c sources, seules les c premières valeurs singulières ne sont pas nulles. Les vecteurs propres qui leur sont associés à gauche et à droite constituent deux bases du sous-espace signal (SES) \mathcal{E}_s . En présence de perturbations (matrice spectrale mal estimée, mauvais choix du retard, bruit très fort) les écarts relatifs entre les c premières valeurs singulières changent et les dernières valeurs singulières ne sont plus nulles. En revanche les c premiers vecteurs de gauche et de droite restent fortement représentatifs de \mathcal{E}_s . Il est donc préférable d'exploiter les vecteurs propres plutôt que les valeurs singulières pour déterminer la dimension de \mathcal{E}_s .

Aux paragraphes 6.4.2 et 6.4.3 nous proposons deux critères pour estimer le nombre de sources à partir des vecteurs singuliers de la Matrice Spectrale Décalée. Le premier traite la matrice des produits extérieurs hermitiens des vecteurs singuliers. Cette matrice a un partitionnement particulier qui permet de détecter la dimension de \mathcal{E}_s . Les dimensions des sous-matrices sont estimées par des méthodes de traitement d'images. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'elle permet de détecter le cas où il n'y a pas de sources, c'est à dire pas de structure particulière dans l'image. Le second est un critère de distance minimale entre sous-espaces. Ces deux critères ne nécessitent pas de connaissance *a priori* sur les lois des bruits et autorisent qu'ils soient temporellement et spatialement corrélés. La robustesse en est améliorée puisque les distributions des bruits peuvent être quelconques et différentes d'un capteur à l'autre. La seule¹ hypothèse nécessaire est celle qui a été faite précédemment au sujet des supports de corrélation des signaux.

Enfin, le dernier paragraphe compare les méthodes à l'aide des probabilités de succès pour différents modèles de bruits. Ces résultats, présentés en fonction du Rapport Signal à Bruit (RSB), sont obtenus à partir de simulations de Monte-Carlo.

6.2 Formulation du problème

Considérons un système linéaire et stationnaire à n_s entrées et n ($n > n_s$) sorties. Les sources (signaux temporels d'entrée) sont inconnues. Elles sont centrées et décorréélés entre elles. Les sorties observables sont des mélanges convolutifs des sources, perturbés par des bruits additifs. Les bruits sont centrés et décorréélés des sources. Ils peuvent être corrélés entre eux. On s'intéresse aux Transformées de Fourier Discrètes (TFD) des observations, calculées sur des tranches glissantes de N échantillons. Notons c le nombre de composantes-sources présentes au canal discret f . C'est la quantité que nous souhaitons estimer. Le vecteur $\mathbf{r}^t(f)$ des TFD des observations temporelles sur la fenêtre $[t, \dots, t + N - 1]$ s'écrit :

$$\mathbf{r}^t(f) = \underbrace{\mathbf{H}(f) \mathbf{s}^t(f)}_{\mathbf{y}^t(f)} + \mathbf{b}^t(f) \quad (6.1)$$

- $\mathbf{H}(f)$ est la matrice de mélange ($n \times c$) pondérée par les racines carrées des densités spectrales des sources,

¹L'hypothèse de décorrélation des bruits vis-a-vis des sources est conservée.

- $\mathbf{s}^t(f)$ est le vecteur $(c \times 1)$ des sources normalisées,
- $\mathbf{b}^t(f)$ est le vecteur $(n \times 1)$ des bruits.

Dans la suite nous omettons la notation fréquentielle (f). La matrice spectrale des observations est définie par :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}} = \mathbb{E} \left[\mathbf{r}^t \mathbf{r}^{t+} \right]$$

où $()^+$ désigne le transposé-conjugué. Les bruits étant centrés et décorrélés des sources, la matrice spectrale des observations est la somme de la matrice spectrale des mélanges non bruités et de celle des bruits :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}} = \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} + \mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}, \quad (6.2)$$

La matrice spectrale des mélanges non bruités $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ est de rang c . En raison de la normalisation des sources, elle s'exprime simplement en fonction de la matrice de mélange des sources \mathbf{H} :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbf{H}\mathbf{H}^+$$

La matrice \mathbf{H} admet une décomposition en valeurs singulières [GL83, p 16] de la forme

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\Delta^{1/2}\Pi, \quad (6.3)$$

où :

- \mathbf{U} : matrice unitaire de dimension $n \times n$
- $\Delta^{1/2}$: matrice diagonale de dimension $n \times c$
- Π : matrice unitaire de dimension $c \times c$

La matrice diagonale contient les valeurs singulières positives ou nulles rangées par valeurs décroissantes. Ici, \mathbf{H} étant de rang plein dans les colonnes, ses valeurs singulières sont toutes strictement positives. De plus le nombre de capteurs étant supérieur au nombre de sources les $(n - c)$ dernières lignes de $\Delta^{1/2}$ ne possèdent que des zéros :

$$\Delta^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\lambda_c} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_c > 0.$$

En introduisant la décomposition en valeurs singulières (DVS) de \mathbf{H} dans l'expression de la matrice spectrale des observations, on obtient la décomposition en valeurs propres (DVP) de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbf{U}\Delta\mathbf{U}^+ \quad (6.4)$$

avec

$$\Delta = \Delta^{1/2} \Delta^{1/2 T}$$

L'écriture (6.4) peut se réduire sous la forme (6.5) où l'on conserve dans \mathbf{V} uniquement les c premières colonnes de \mathbf{U} et dans Λ uniquement les c premières lignes et colonnes de Δ .

$$\mathbf{R}_{yy} = \underbrace{\mathbf{V}}_{n \times c} \underbrace{\Lambda}_{c \times c} \underbrace{\mathbf{V}^+}_{c \times n} \quad (6.5)$$

La matrice \mathbf{V} représente une base du sous-espace signal \mathcal{E}_s . Le problème se ramène donc à estimer le rang de \mathbf{R}_{yy} (ou le nombre de vecteurs de \mathbf{V}) à partir des observations \mathbf{r}^t . Comme nous avons accès uniquement à une estimation de la matrice spectrale des observations bruitées \mathbf{R}_{rr} , des hypothèses sur les bruits ou la connaissance exacte de \mathbf{R}_{bb} sont nécessaires. Nous détaillons au paragraphe suivant les hypothèses couramment utilisées dans les méthodes classiques lorsque la matrice spectrale des bruits \mathbf{R}_{bb} est inconnue.

6.3 Méthodes classiques

6.3.1 Méthodes statistiques avec l'hypothèse de bruits blancs

Le problème de l'estimation de la dimension du sous-espace signal est très fréquent en traitement du signal ou analyse de données. Les méthodes non paramétriques les plus connues, AIC (Akaike Information Criteria) et MDL (Maximum Description Length) [Sch78], sont basées sur l'analyse des valeurs propres de la matrice de covariance, ou ici la matrice spectrale des observations \mathbf{R}_{rr} . Dans ces méthodes on suppose que les bruits sont spatialement blancs :

$$\mathbf{R}_{bb} = \sigma_b^2 \mathbf{I}_n \text{ où } \mathbf{I}_n \text{ est l'identité de rang } n$$

La DVP de \mathbf{R}_{rr} se factorise alors

$$\mathbf{R}_{rr} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}, \mathbf{V}_\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta + \sigma_b^2 \mathbf{I}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_b^2 \mathbf{I}_{n-c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^+ \\ \mathbf{V}_\perp^+ \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

où \mathbf{V}_\perp est une base du sous-espace complémentaire orthogonal au sous-espace engendré par \mathbf{V} . On constate qu'en théorie le cas de bruits spatialement blancs revient simplement à considérer simplement un décalage de l'origine pour les valeurs propres. Le zéro est remplacé par la dsp du bruit. Dans la pratique l'estimation des matrices de covariance est entachée d'erreur et les éléments diagonaux de \mathbf{R}_{bb} ne sont pas tous identiques, perturbant toutes les valeurs propres et les vecteurs propres qui leur sont associés. Indiquons à ce sujet que dans [PH96], les auteurs remarquent qu'en présence de bruits blancs, le profil moyen des valeurs propres ordonnées des matrices de covariance estimées est très proche d'une fonction exponentielle décroissante. Pour déterminer σ_b^2 et par suite c il faut procéder à un test statistique à partir

de la loi du vecteur d'observation \mathbf{r}^t . C'est l'objet des méthodes AIC (Akaike Information Criteria) et MDL (Maximum Description Length) [Sch78]. L'hypothèse retenue est celle de bruits gaussiens. Un test du Maximum de Vraisemblance est ensuite effectué sur les valeurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$.

Lorsque les bruits possèdent des dsp différentes ou des composantes spectrales corrélées ou encore lorsque la matrice spectrale n'est pas assez bien estimée, le test d'hypothèses est mis en défaut car on ne peut plus faire la factorisation (6.6). En effet, les valeurs propres "voient" alors des contributions différentes des dsp des bruits et les directions principales d'énergie ne sont plus dans le sous-espace signal. De plus, la théorie de la perturbation nous indique que dans le cas d'une matrice hermitienne, l'ordre de la perturbation qui agit sur chaque valeur propre est bien approché par la norme 2 de la matrice de perturbation [GL83, p200-203]. Ici on peut considérer que la matrice de perturbation est égale à la différence entre $\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$ et une matrice $\sigma_b^2 \mathbf{I}_n$ ou σ_b^2 est la moyenne des éléments diagonaux de $\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$. Si les bruits sont spatialement corrélés ou de puissances différentes, les valeurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ sont alors sensibles aux perturbations et le rang de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ ne sera pas fiable. En conclusion, les méthodes AIC et MDL sont très peu robustes aux hypothèses de bruits spatialement blancs et gaussiens, ainsi que les méthodes exploitant les lois des valeurs propres de la matrice de covariance des observations.

6.3.2 Abandon de l'hypothèse de bruits blancs

Certains auteurs n'utilisent pas l'hypothèse de bruit spatialement blancs. Dans [WW94] [SCS95] [SC97], $\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$ n'est plus proportionnelle à l'identité et est remplacée par une matrice diagonale bloc moins contraignante. D'autres auteurs supposent que le support temporel de corrélation du bruit est plus faible que celui des sources [SVO94] [VSO95] [SC97]. Cette dernière hypothèse est réaliste pour notre application puisque les sources sinusoïdales ont des supports de corrélation infinis. La méthode de la variable instrumentale par exemple a été développée dans les deux cas [SC97]. L'idée est de travailler avec deux jeux de données pour lesquels les composantes de bruits sont décorrélés et les composantes de signal restent fortement corrélés. Selon les hypothèses faites sur $\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$, les deux jeux de données sont :

- soit deux sous-vecteurs d'un même jeu de données ; on parle alors de variable instrumentale spatiale car ceci est équivalent à considérer des sous-antennes,
- soit deux vecteurs décalés dans le temps ; on parle alors de variable instrumentale temporelle.

La matrice d'intercorrélacion entre les deux jeux de données s'affranchit alors de l'influence des bruits. Sous la condition que la taille de chacun des sous-vecteurs (n_1 et n_2) soit supérieure ou égale au nombre de sources c , le rang de cette matrice est égal à c . En ayant calculé les matrices d'intercorrélacion avec un sous-vecteur de dimension n_2 variable, on détecte la valeur de n_2 (égale à $c + 1$) pour laquelle la dernière valeur propre est théoriquement nulle. Pour détecter cette situation la méthode de la variable instrumentale procède à un test statistique sur la loi de la dernière valeur propre. Les signaux reçus sur les capteurs sont supposés être

des variables aléatoires iid, gaussiennes, complexes circulaires. En incrémentant n_2 , la loi de la dernière valeur propre de la matrice de d'intercorrélacion est alors gaussienne pour ($n_2 = c+1$).

Dans [WT98], nous retrouvons l'idée de travailler sur deux antennes distinctes. Les auteurs calculent ensuite une fonction de vraisemblance d'après la matrice de covariance du système complet. Les données sont encore supposées gaussiennes.

Le désavantage de ces méthodes réside dans le fait qu'il faut un grand nombre de capteurs pour créer des sous-vecteurs des données. D'autre part, pour obtenir un test sur les valeurs propres des matrices de covariance on doit définir leurs distributions statistiques. Le test est alors sensible au fait que $\mathbf{R}_{\mathbf{bb}}$ ne suit pas le modèle théorique. Les données reçues sur les capteurs sont alors modélisées par des gaussiennes iid. Pour l'application envisagée dans cette thèse, l'hypothèse de sources gaussiennes est irréaliste. De plus, la distribution asymptotique des valeurs propres dépend des valeurs propres exactes de la matrice, qui sont inconnues [CWR91].

6.3.3 Méthodes fondées sur la stabilité du sous-espace signal

La méthode exposée dans [Kol94] travaille directement sur les vecteurs propres de la matrice de covariance. L'auteur rappelle que les vecteurs propres du sous espace signal \mathcal{E}_s sont plus stables que ceux du sous-espace bruit \mathcal{E}_b . En effet, la stabilité d'un vecteur propre dépend à la fois de la sensibilité et de l'isolement de sa valeur propre associée, par rapport aux autres valeurs propres [GL83, p.204]. Dans l'hypothèse où les $(n - c)$ valeurs propres du sous-espace bruit sont égales (bruit spatialement blanc), n'importe quelle famille de $(n - c)$ vecteurs orthogonaux entre eux et appartenant à \mathcal{E}_s^\perp , est une famille de vecteurs propres de \mathcal{E}_b . Il n'y a pas de direction privilégiée dans ce sous-espace. Les vecteurs propres sont alors très sensibles aux erreurs d'estimation de la matrice de covariance. Les vecteurs propres du sous-espace instable \mathcal{E}_s^\perp sont équirépartis dans ce sous-espace.

Les vecteurs propres de \mathcal{E}_s sont plus stables, car ils sont généralement associés à des valeurs propres distinctes. Cependant, s'il existe une valeur propre multiple, ses vecteurs propres associés seront aussi instables. L'auteur propose donc de tester la stabilité non pas sur les vecteurs propres mais sur les sous-espaces associés à ces vecteurs [Kol94]. Considérons un sous-espace associé à des valeurs propres égales ($\lambda_k = \lambda \forall k = i, \dots, l$), il forme un sous-espace stable si λ est distincte de λ_{i-1} et λ_{l+1} . Le sous-espace signal est en général une somme directe de plusieurs sous-espaces stables associés chacun à des valeurs propres distinctes ou une valeur propre multiple. La somme directe de sous-espaces stables constitue encore un sous-espace stable [Kol94].

L'auteur suppose avoir accès à deux matrices de covariance estimées sur des observations indépendantes. Il mesure la stabilité par la distance entre les projecteurs sur les sous-espaces des deux matrices de covariance [GL83, p 21].

6.3.4 Les méthodes proposées

Dans notre application le support de corrélation des sources est infini et celui des bruits est supposé fini. Pour éliminer l'influence du bruit nous estimons, à l'aide d'un retard τ , une Matrice Spectrale Décalée notée $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$, analogue aux matrices de corrélation décalées [SC97]. Si la valeur du retard τ est bien choisi (voir chapitre 4), ceci permet de s'affranchir presque totalement du bruit, quelle que soit la forme de la matrice de covariance des bruits $\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}$ et leurs densités de probabilités.

Considérons tout d'abord la décomposition en valeurs propres (DVP) d'une Matrice Spectrale Décalée. Cette matrice n'étant pas hermitienne, la sensibilité aux perturbations des valeurs propres dépend de l'isolement de chaque valeur propre et du cosinus de l'angle entre les vecteurs propres à droite et à gauche [GL83, p.203]. Il peut donc exister des valeurs propres plus ou moins sensibles à une perturbation. En particulier, les valeurs propres associées à \mathcal{E}_s^\perp sont théoriquement nulles et donc égales. Elles sont très sensibles à une erreur d'estimation et il est difficile de définir un test statistique sur ces valeurs. Pour un vecteur propre, la sensibilité aux perturbations dépend de l'isolement de la valeur propre qui lui est associée par rapport aux autres valeurs propres. En conséquence, les vecteurs propres de \mathcal{E}_s^\perp sont eux aussi très instables. Bien que la perturbation due au bruit soit très faible pour les Matrices Spectrales Décalées, il est préférable de ne pas travailler sur les valeurs et vecteurs propres de cette matrice non hermitienne.

Considérons maintenant la décomposition en valeurs singulières (DVS) d'une Matrice Spectrale Décalée. Cette décomposition fournit une matrice diagonale de valeurs singulières et deux matrices unitaires distinctes de vecteurs singuliers (vecteurs singuliers à droite et à gauche). Chaque matrice unitaire contient une base de \mathcal{E}_s ainsi qu'une base de \mathcal{E}_s^\perp . Les valeurs singulières d'une matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ sont les racines carrées des valeurs propres du produit hermitien $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau+}$. De ce fait les valeurs singulières non nulles de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ sont plus stables que ses valeurs propres car les vecteurs propres à droite et à gauche de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau+}$ sont les mêmes. De ce fait la stabilité du sous-espace signal est assurée. Par ailleurs comme les valeurs singulières associées à \mathcal{E}_s^\perp sont nulles, les vecteurs propres qui leur sont associés à droite et à gauche sont très instables. En raison des erreurs d'estimation ils sont équirépartis dans \mathcal{E}_s^\perp . Les deux bases de \mathcal{E}_s^\perp sont très différentes, cependant \mathcal{E}_s^\perp constitue un sous-espace stable car il est associé à une valeur singulière unique (nulle). Pour exploiter ces deux propriétés (diversité des deux bases du sous-espace bruit et stabilité du sous-espace bruit), nous proposons deux méthodes.

La première est une méthode de traitement d'images appliquée sur l'image constituée par les produits scalaires hermitiens entre vecteurs singuliers à droite et à gauche. Chaque terme de cette matrice représente le cosinus de l'angle entre un vecteur singulier à droite et un vecteur singulier à gauche. Les sous-espaces \mathcal{E}_s et \mathcal{E}_s^\perp étant stables, la matrice obtenue est partitionnée. Les dimensions des sous-matrices correspondent aux dimensions des sous-espaces \mathcal{E}_s et \mathcal{E}_s^\perp . Elles sont estimées par des opérations de traitement d'images (détection de contour). L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'elle permet aussi de détecter le

cas où il n'y a pas de sources, c'est à dire pas de structure particulière dans l'image, car on a supposé que le nombre de capteur est strictement supérieur au nombre de sources ($n > c$).

La deuxième méthode s'inspire de [Kol94] et consiste à rechercher les sous-espaces stables invariants. Nous envisageons un critère algébrique qui analyse l'ensemble des distances entre les sous-espaces et calculons une distance entre les projecteurs sur des partitions de sous-espaces. La distance est minimale (théoriquement nulle) lorsque les vecteurs singuliers à droite et à gauche engendrent le même sous-espace [GL83, p 21]. Un critère de distance minimale (nulle en théorie) entre projecteurs sur les sous-espaces à gauche et à droite permet de déterminer la dimension de ces bases.

6.4 Méthodes basées sur les Matrices Spectrales Décalées

Lorsque les supports de corrélation des bruits sont inférieurs à ceux des sources, il est possible d'utiliser des observations décalées temporellement pour constituer une Matrice Spectrale Décalée qui ne subit pas l'influence du bruit (voir chapitre 4). Pour un même jeu de données nous pouvons constituer une série de matrices spectrales qui contiennent la même information géométrique et des informations statistiques différentes.

Nous avons rappelé au paragraphe 6.3 qu'il ne semble pas judicieux d'exploiter les valeurs propres ni les vecteurs propres de la Matrice Spectrale Décalée en raison de leur sensibilité aux perturbations. Nous proposons donc au paragraphe 6.4 d'exploiter les valeurs singulières et vecteurs singuliers à droite et à gauche. Dans un premier temps, nous explicitons la Matrice Spectrale Décalée en fonction des éléments du mélange (paragraphe 6.4.1) et montrons le lien entre sa DVS et les sous-espaces \mathcal{E}_s et \mathcal{E}_s^\perp de l'espace des observations. Ensuite, aux paragraphes 6.4.2 et 6.4.3 nous proposons deux critères pour estimer le nombre de sources à partir des vecteurs singuliers de la Matrice Spectrale Décalée.

Enfin, le dernier paragraphe compare les méthodes à l'aide de probabilités de succès (probabilité d'estimation correcte) pour différents modèles de bruits. Ces résultats, présentés en fonction du RSB, sont obtenus à partir de simulations de Monte-Carlo.

6.4.1 DVS de la Matrice Spectrale Décalée

Comme au paragraphe 6.2 supposons que c signaux sources possèdent des composantes spectrales au canal fréquentiel f . Le vecteur \mathbf{y}^t des mélanges non bruités s'écrit comme le produit d'une matrice \mathbf{H} de taille $(n \times c)$ par le vecteur \mathbf{s}^t de taille $(c \times 1)$ des signaux sources normalisés². Le vecteur \mathbf{r}^t des observations est la somme de \mathbf{y}^t et d'une composante de bruit \mathbf{b}^t de taille $(n \times 1)$ (relation 6.1). Compte tenu de l'indépendance des sources et des bruits, les Matrices Spectrales Décalées des observations $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ définies au chapitre 4 s'écrivent en fonction de celle des mélanges non bruités et de celle des bruits :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau = \text{E} [\mathbf{r}^t \cdot (\mathbf{r}^{t+\tau})^+] = \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^\tau + \mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}^\tau$$

²Il est possible d'échanger un gain entre \mathbf{H} et \mathbf{s} et de considérer que les densités spectrales de puissance moyenne à la fréquence f sont unitaires.

où \mathbf{r}^t et $\mathbf{r}^{t+\tau}$ sont les TFD des observations temporelles sur les fenêtres débutant respectivement aux indices t et $t + \tau$. Dans le cas général la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ n'est ni hermitienne, ni définie positive (voir annexe C.3).

Notons τ_s le plus petit support de corrélation des sources et τ_B le plus grand support de corrélation des bruits. Si l'on peut choisir un retard τ tel que $\tau_B < N + \tau \leq \tau_s$ alors \mathbf{r}^t et $\mathbf{r}^{t+\tau}$ ont des composantes de bruit décorréelées et des composantes de signal corrélées (voir paragraphes 4.5.2, 4.5.3 et 4.5.4). Par conséquent la matrice d'intercorrélations des composantes de bruit $\mathbf{R}_{\mathbf{b}\mathbf{b}}^\tau$ est nulle et la Matrice Spectrale Décalée des observations correspond exactement à la Matrice Spectrale Décalée des mélanges non bruités :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau = \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^\tau = \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}^\tau\mathbf{H}^+ \quad (6.7)$$

Dans cette écriture, $\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}^\tau$, de taille $(c \times c)$, est la Matrice Spectrale Décalée des sources. En raison de la normalisation et de l'indépendance des sources, $\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}^\tau$ est une matrice diagonale d'exponentielles complexes, notée θ :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}^\tau = \mathbb{E} \left[\mathbf{s}^t \cdot (\mathbf{s}^{t+\tau})^+ \right] = \begin{bmatrix} e^{j\theta_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{j\theta_c} \end{bmatrix} = \theta \quad (6.8)$$

Par ailleurs, la décomposition en valeurs singulières [GL83, p 16] de la matrice de mélange \mathbf{H} est :

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\Delta^{1/2}\Pi, \quad (6.9)$$

où :

- \mathbf{U} : matrice unitaire de dimension $n \times n$
- $\Delta^{1/2}$: matrice diagonale de dimension $n \times c$
- Π : matrice unitaire de dimension $c \times c$

$$\Delta^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\lambda_c} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_c > 0.$$

La relation (6.7) peut se réécrire en fonction de θ et des éléments singuliers de \mathbf{H} :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau = \mathbf{U}\Delta^{1/2}\Pi\theta\Pi^+\Delta^{1/2+}\mathbf{U}^+ \quad (6.10)$$

on observe alors que :

$$\Delta^{1/2}\Pi\theta\Pi^+\Delta^{1/2} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

où \mathbf{X} est de dimension $c \times c$. L'écriture (6.10) peut se réduire sous la forme (6.11) où l'on conserve dans \mathbf{V} uniquement les c premières colonnes de \mathbf{U} et dans $\Lambda^{1/2}$ uniquement les c premières lignes de $\Delta^{1/2}$.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau} = \underbrace{\mathbf{V}}_{n \times c} \underbrace{\Lambda^{1/2} \Pi \theta \Pi^+ \Lambda^{1/2}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\mathbf{V}^+}_{c \times n} \quad (6.11)$$

La matrice \mathbf{X} , de rang c , admet une DVS de la forme

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{Z}^+, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \text{ unitaires } c \times c \\ \mathbf{D}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{d_c} \end{bmatrix} \end{array} \right. \text{ avec } d_1 \geq \dots \geq d_c > 0 \quad (6.12)$$

En remplaçant (6.12) dans (6.11) on obtient une écriture réduite de la DVS de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau}$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau} = \mathbf{E}_c \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{F}_c^+ \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_c = \mathbf{V} \mathbf{Y} \\ \mathbf{F}_c = \mathbf{V} \mathbf{Z} \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Cette écriture permet de constater que les c premiers vecteurs singuliers de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau}$ à gauche (\mathbf{E}_c) et à droite (\mathbf{F}_c) sont liés aux c premiers vecteurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ par deux transformations orthogonales (\mathbf{Y} et \mathbf{Z}). Les transformations orthogonales sont induites par la matrice de phases θ qui, dans le cas général, n'est pas proportionnelle à l'identité. Les matrices \mathbf{E}_c et \mathbf{F}_c constituent deux bases du sous-espace signal \mathcal{E}_s exprimées dans l'espace des observations de dimension n . Elles vérifient la relation (6.14) où Ω est une matrice unitaire.

$$\mathbf{F}_c^+ \mathbf{E}_c = \mathbf{Z}^+ \mathbf{Y} = \Omega \quad (6.14)$$

La décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau}$ dans son écriture complète s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau} = \underbrace{[\mathbf{E}_c, \bar{\mathbf{E}}_c]}_{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \underbrace{[\mathbf{F}_c, \bar{\mathbf{F}}_c]^+}_{\mathbf{F}} \quad (6.15)$$

où :

- \mathbf{E} et \mathbf{F} sont les matrices unitaires de vecteurs singuliers,
- \mathbf{E}_c et \mathbf{F}_c de dimension $(n \times c)$ engendrent \mathcal{E}_s ; leurs vecteurs colonne sont définis à une exponentielle complexe près,
- $\bar{\mathbf{E}}_c$ de dimension $n \times (n - c)$ engendre le noyau de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau+}$, noté \mathcal{E}_s^{\perp} ; elle est définie à une transformation orthogonale près de dimension $(n - c) \times (n - c)$ car ses vecteurs colonne sont associés aux valeurs singulières nulles,
- $\bar{\mathbf{F}}_c$ de dimension $n \times (n - c)$ engendre le noyau de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau}$; elle est définie à une transformation orthogonale près de dimension $(n - c) \times (n - c)$ car ses vecteurs colonne sont associés aux valeurs singulières nulles.

\mathbf{E}_c et \mathbf{F}_c , de dimension $n \times c$, représentent deux bases distinctes du sous-espace signal \mathcal{E}_s puisque la Matrice Spectrale Décalée n'est pas hermitienne. $\overline{\mathbf{E}}_c$ et $\overline{\mathbf{F}}_c$, de dimension $n \times (n-c)$, représentent deux bases du sous-espace \mathcal{E}_s^\perp . Les vecteurs singuliers du sous-espace bruit, étant liés à des valeurs singulières théoriquement nulles sont totalement libres d'évoluer dans \mathcal{E}_s^\perp . Les vecteurs des deux bases de \mathcal{E}_s^\perp auront donc tourné plus fortement que ne l'auront fait les vecteurs des deux bases de \mathcal{E}_s .

Dans cette étude, nous avons supposé que le retard choisi est optimal vis-à-vis de la décorrélation des bruits et de la corrélation des sources. Cette situation théorique se traduit par l'égalité entre la Matrice Spectrale Décalée des observations, $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$, et celle des mélanges non bruités, $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^\tau$. Par conséquent, le nombre de valeurs singulières non nulles (le rang de $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$) donne la dimension de \mathcal{E}_s . En pratique, le retard utilisé est rarement optimal. Une matrice de perturbation s'ajoute à $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ pour donner l'estimée $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$. Cette matrice, notée ε , contient les termes des corrélations résiduelles des bruits auxquelles s'ajoutent les erreurs d'estimation qui proviennent essentiellement de la durée finie d'intégration. Le rang de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ n'est plus nécessairement identique à celui de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^\tau$. Si les signaux sources possèdent des supports de corrélation suffisamment longs, nous pouvons toujours considérer que le rang de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^\tau$ correspond à la dimension de \mathcal{E}_s . Déterminer la dimension de \mathcal{E}_s revient à déterminer le rang de $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^\tau$, à partir de la Matrice Spectrale Décalée estimée $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$.

En tenant compte des termes d'erreur décrits précédemment, la décomposition en valeurs singulières de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ est

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}'_c & \overline{\mathbf{E}}'_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}'} \begin{bmatrix} \mathbf{D}'^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta'^{1/2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}'_c & \overline{\mathbf{F}}'_c \end{bmatrix}^+}_{\mathbf{F}'}, \quad (6.16)$$

où \mathbf{E}' et \mathbf{F}' de dimension $(n \times n)$ sont les matrices unitaires de vecteurs singuliers, $\mathbf{D}'^{1/2}$ et $\Delta'^{1/2}$ sont des matrices diagonales de valeurs singulières :

$$\mathbf{D}'^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{d'_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{d'_c} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad d'_1 \geq \dots \geq d'_c > 0$$

$$\Delta'^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\delta'_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\delta'_{n-c}} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \delta'_1 \geq \dots \geq \delta'_{n-c} > 0$$

Les matrices \mathbf{E}'_c et \mathbf{F}'_c constituées des c premières colonnes des matrices de vecteurs singuliers \mathbf{E}' et \mathbf{F}' représentent des directions principales d'énergie. Si $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ est obtenue avec un temps d'intégration et un retard suffisants, ces directions d'énergie sont fortement imposées par les sources tandis que les $(n-c)$ suivantes sont relativement libres dans le sous-espace bruit résiduel. En théorie, seules les c premières valeurs singulières ne sont pas nulles d'_1, \dots, d'_c .

En présence de perturbations (erreur d'estimation de la matrice spectrale, bruit très fort) les écarts relatifs entre les c premières valeurs singulières changent et les dernières valeurs singulières ne sont plus nulles. Nous supposons que $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau$ est obtenue avec un temps d'intégration et un retard suffisants pour que les valeurs singulières $\sqrt{\delta'_1}, \dots, \sqrt{\delta'_{n-c}}$ (théoriquement nulles) soient faibles et inférieures à la plus petite valeur singulière du sous-espace signal d'_c . Ceci signifie que les termes d'erreurs ne seront pas suffisamment grands pour faire basculer un vecteur du sous-espace signal vers le sous-espace orthogonal et réciproquement. Dans ces conditions nous allons utiliser les résultats de la théorie de la perturbation. Rappelons que les valeurs singulières de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau$ sont les racines carrées des valeurs propres de $(\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau \cdot \widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^{\tau+})$ ou de $(\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^{\tau+} \cdot \widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau)$. Les vecteurs singuliers à gauche et à droite sont respectivement les vecteurs propres de $(\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau \cdot \widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^{\tau+})$ et $(\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^{\tau+} \cdot \widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau)$. D'après la théorie de la perturbation, les vecteurs propres vérifient les deux propriétés suivantes :

- les $(n - c)$ derniers vecteurs singuliers de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau$ sont équirépartis dans le sous-espace bruit puisque associés à des valeurs singulières proches et faibles. Ils sont alors très sensibles à des perturbations [GL83, p 204]. Par conséquent les $(n - c)$ derniers vecteurs singuliers de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau$ à droite et à gauche seront *a priori* très différents.
- si $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau$ est obtenue avec un temps d'intégration et un retard suffisants, les valeurs propres $\delta'_1, \dots, \delta'_{n-c}$ ont des valeurs proches, distinctes de d'_c . De ce fait les $(n - c)$ derniers vecteurs propres constituent un sous-espace stable invariant même si les vecteurs propres sont instables [GL83, p 205]. Ce sous-espace est représentatif de la partie du sous-espace bruit qui est orthogonale au sous-espace signal notée \mathcal{E}_s^\perp . En conséquence, les c premiers vecteurs singuliers à gauche et à droite (orthogonaux aux sous-espaces stables précédents) restent fortement représentatifs de \mathcal{E}_s .

Si les signaux sources sont déterministes (situation qui nous intéresse), $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau$ possède une composante stochastique négligeable et l'emploi de critères statistiques est déconseillé. Comme nous désirons nous affranchir d'hypothèses sur les lois de probabilité des observations, il est préférable d'exploiter les vecteurs singuliers plutôt que les valeurs singulières pour déterminer la dimension de \mathcal{E}_s . D'autre part, la dynamique des vecteurs singuliers est toujours la même puisque les matrices des vecteurs singuliers sont unitaires. Nous allons exploiter les deux propriétés précédentes. Nous proposons deux critères non statistiques : le premier est basé sur la diversité des vecteurs singuliers de \mathcal{E}_s^\perp (paragraphe 6.4.2) et le second sur la stabilité de sous-espaces invariants (paragraphe 6.4.3).

6.4.2 Critère heuristique par Traitement d'Images

Les vecteurs singuliers des bases du sous-espace \mathcal{E}_s^\perp sont équirépartis dans le sous-espace et sont donc plus libres que ceux des bases du sous-espace signal \mathcal{E}_s . De plus, les vecteurs singuliers de \mathcal{E}_s^\perp , à droite et à gauche, sont indépendants puisque liés par une valeur singulière nulle ou très faible. La seule contrainte est qu'ils forment une base orthonormée du sous-espace orthogonal. Pour estimer c nous proposons un critère heuristique qui analyse l'ensemble des produits scalaires entre les vecteurs singuliers à droite (\mathbf{E}') et à gauche (\mathbf{F}') de la DVS de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau$

donnée par la relation 6.16. D'après la remarque précédente, la matrice des produits scalaires aura une structure particulière qui révélera les dimensions des deux sous-espaces \mathcal{E}_s et \mathcal{E}_s^\perp . Si nous réalisons les produits scalaires entre les vecteurs singuliers à gauche et à droite de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{rr}}^\tau$, nous obtenons la matrice unitaire suivante :

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}'^+ \mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \mathbf{E}'_c + \mathbf{F}'_c & \mathbf{E}'_c + \overline{\mathbf{F}'_c} \\ \overline{\mathbf{E}'_c} + \mathbf{F}'_c & \overline{\mathbf{E}'_c} + \overline{\mathbf{F}'_c} \end{bmatrix}$$

Si les estimations sont parfaites alors les sous-matrices $\mathbf{E}'_c + \overline{\mathbf{F}'_c}$ et $\overline{\mathbf{E}'_c} + \mathbf{F}'_c$ sont nulles car le sous-espace engendré par \mathbf{E}'_c et \mathbf{F}'_c est orthogonal à ceux engendrés par $\overline{\mathbf{E}'_c}$ et $\overline{\mathbf{F}'_c}$ (voir les commentaires sur la DVS de $\mathbf{R}_{\mathbf{rr}}^\tau$ au paragraphe 6.4.1). Puisque nous pouvons considérer que les vecteurs singuliers théoriques engendrent des sous-espaces stables invariants, les vecteurs singuliers estimés seront fortement représentatifs des sous-espaces exacts. Les termes des sous-matrices $\mathbf{E}'_c + \overline{\mathbf{F}'_c}$ et $\overline{\mathbf{E}'_c} + \mathbf{F}'_c$ auront alors des valeurs proches de zéro. Par contre, la sous-matrice des produits scalaires entre les vecteurs de $\overline{\mathbf{E}'_c}$ et $\overline{\mathbf{F}'_c}$ est une matrice pleine puisque les vecteurs singuliers de \mathcal{E}_s^\perp , à droite et à gauche, sont théoriquement indépendants. L'angle entre deux vecteurs singuliers à droite et à gauche est équiréparti entre 0 et 2π selon [Kol94]. Il est donc peu probable d'obtenir deux vecteurs orthogonaux.

Les sous-matrices $\mathbf{E}'_c + \mathbf{F}'_c$ et $\overline{\mathbf{E}'_c} + \overline{\mathbf{F}'_c}$ sont unitaires. Nous les dénommerons respectivement \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 . La matrice \mathbf{A} théorique possède donc une structure particulière :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} c \\ n - c \\ c & n - c \end{matrix}$$

L'intérêt de travailler sur cette matrice est que sa structure est totalement indépendante de la densité de probabilité des sources ou des bruits. Elle est aussi robuste vis-à-vis de la puissance des bruits, puisque les vecteurs singuliers sont unitaires. L'augmentation de la puissance des bruits va augmenter la sensibilité de chaque vecteur propre en augmentant l'erreur d'estimation, donc la perturbation. Plus la perturbation est grande, plus elle agit aussi sur les vecteurs singuliers du sous-espace signal. Les vecteurs à droite et à gauche vont donc 'tourner' plus, tout en restant toujours dans le même sous-espace. La seule restriction de la méthode est d'estimer assez correctement la Matrice Spectrale Décalée, de manière à ce que les valeurs singulières ordonnées les plus faibles soient bien associées au sous-espace bruit.

Comme nous l'avons vu la matrice \mathbf{A}_2 est généralement pleine. Nous proposons de traiter $|\mathbf{A}| = (|a_{ij}|)$ comme une image et de détecter le partitionnement en quatre sous-matrices. D'après la remarque précédente, la sous-matrice \mathbf{A}_2 possède une structure pleine qui la rend plus facilement détectable que \mathbf{A}_1 . Nous chercherons donc les contours gauche et supérieur de $|\mathbf{A}_2|$ dans l'image. Différentes techniques classiques en traitement d'images peuvent être utilisées pour rechercher le contour de $|\mathbf{A}_2|$. Nous en avons testé plusieurs. Nous détaillons l'association des méthodes qui conduit à la meilleure détection en terme de probabilité de

détection comme le montrent les résultats de simulation Monte-Carlo. Pour utiliser ces techniques de traitement d'images, nous commençons par dilater $|\mathbf{A}|$ d'un facteur 3 en lignes et en colonnes de façon à pouvoir lui appliquer des filtres RIF bidimensionnels. En effet les plus petits filtres utilisables en traitement d'image sont de taille 3×3 . Nous dupliquons aussi la dernière ligne et la dernière colonne pour gérer les effets de bords de la convolution.

Prenons l'exemple de 2 sources mélangées sur 6 capteurs sous un Rapport Signal à Bruit de -10 dB. Les bruits sont spatialement corrélés et non gaussiens. La figure 6.1 représente la matrice $|\mathbf{A}| = (|a_{ij}|)$ de dimension (19×19) après dilatation. La structure de cette matrice est conforme à la théorie, même pour un très faible rapport signal à bruit de -10dB. Les techniques de traitement d'images sont capables de détecter correctement la dimension de $|\mathbf{A}_2|$.

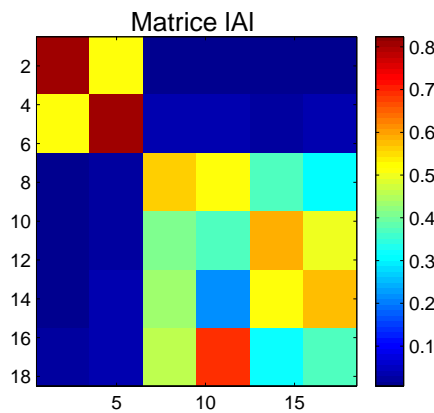


FIG. 6.1: Image de la matrice $|\mathbf{A}|$

La technique la plus connue en traitement d'image pour rehausser les contrastes au niveau d'un contour est la dérivée seconde. La figure 6.2 illustre ce propos à l'aide des dérivées première et seconde d'un contour dans un signal monodimensionnel. On constate que la dérivée seconde donne une localisation du front montant plus précise que la dérivée première (un seul maximum au lieu de deux). La dérivée seconde ayant tendance à amplifier les hautes fréquences, on compensera ce phénomène en utilisant plusieurs retards et en moyennant.

Nous avons donc utilisé un filtre Laplacien 3×3 sur l'image $|\mathbf{A}|$ pour obtenir une matrice \mathbf{B} . Le masque de convolution de ce filtre est donné en (6.17). Les résultats obtenus sont représentés à la figure (figure 6.3). En comparant l'échelle de l'image obtenue à celle de l'image d'origine on constate que l'on a rehaussé le contraste sur certaines zones du contour et conservé le contraste important sur les autres.

$$\text{Laplacien} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

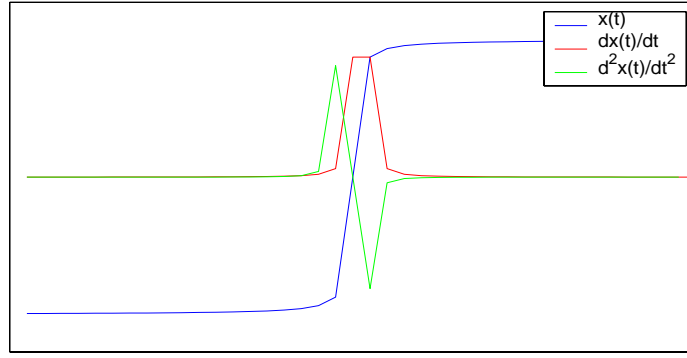
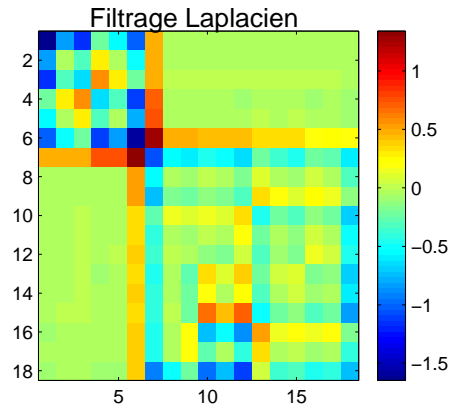


FIG. 6.2: Effet des dérivées première et seconde sur un contour


 FIG. 6.3: Image **B** obtenue par filtrage Laplacien de $|\mathbf{A}|$

Nous cherchons dans **B** la présence (ou non) de fronts montants et leur positionnement. L'emplacement des fronts montants nous indiquera la dimension de $|\mathbf{A}_2|$, donc du sous-espace \mathcal{E}_s^\perp . Comme nous recherchons des fronts montants, la seule information intéressante dans l'image réside dans les pixels à valeurs positives. Nous seuillons donc l'image en ne conservant que les pixels à valeurs positives. Les autres sont mis à zéro. On obtient la matrice **C** de la figure 6.4.

Cette étape permet ici de détecter la présence (ou non) dans l'image d'une structure en sous-matrice, c'est à dire d'un demi-contour carré où les pixels sont positifs. Les pixels positifs sont remplacés par la valeur 1 et les autres par la valeur 0. Ici les contours gauche et supérieur de $|\mathbf{A}_2|$ (indice $3 \cdot c = 6$) entre autres sont remplacés par une suite de 1. Comme on peut passer du bord inférieur de l'image (colonne d'indice $3c$) au bord droit (ligne de même indice $3c$) par une succession de 1 (sauf le coin de coordonnées $(3c, 3c)$ qui n'est jamais pris en compte) on détecte la séparation entre \mathcal{E}_s de dimension c et \mathcal{E}_s^\perp de dimension $(n - c)$. Si aucun contour fermé n'existe, le nombre de sources est estimé à zéro.

Dans le cas où un (plusieurs) contour(s) fermé(s) a (ont) été détecté(s), nous reprenons

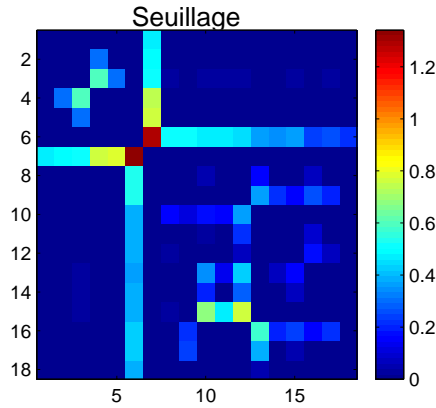


FIG. 6.4: Image \mathbf{C} où l'on n'a conservé que les valeurs positives de \mathbf{B}

la matrice \mathbf{C} (donc celle avant seuillage à 1) de la figure 6.4 pour y rechercher le contour qui possède globalement le plus grand contraste. Pour cela nous commençons par un rehaussement de contraste par filtrage de Sobel Horizontal sur la matrice triangulaire supérieure et par filtrage de Sobel vertical sur la matrice triangulaire inférieur. On obtient une matrice dénommée \mathbf{D} (figure 6.5). Ce type de filtrage permet de renforcer un front horizontal ou vertical sur 3 lignes ou colonnes consécutives. La ligne (ou la colonne) qui nous intéresse est mise à zéro. Les masques de convolution sont donnés ci-dessous.

$$\text{Sobel Horizontal} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sobel Vertical} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La valeur du nombre de sources estimé est ensuite calculée par la recherche du contraste maximal entre les colonnes (sous la diagonale) et du contraste maximal entre les lignes (à droite de la diagonale). Chaque contraste est calculée sur 3 lignes (colonnes) centrées sur la ligne (colonne) d'indice i . Dans le cas de la présence d'un front horizontal, la ligne $(i - 1)$ possède des valeurs $\mathbf{D}_{i-1,l}$ négatives, la ligne i des valeurs $\mathbf{D}_{i,l}$ quasiment nulles, et la ligne $(i + 1)$ des valeurs $\mathbf{D}_{i+1,l}$ positives. On fait varier i de 1 à $3n - 2$ et l'on recherche le contraste maxi par le calcul ci-dessous pour aboutir au nombre de sources estimé.

$$\hat{c} = \arg \left(\max_{i \in [1, 3n-2]} \left(\sum_{l=i+2}^n \underbrace{(\mathbf{D}_{i+1,l} - \mathbf{D}_{i-1,l} - 2|\mathbf{D}_{i,l}|)}_{\text{ligne } i} + \underbrace{(\mathbf{D}_{l,i+1} - \mathbf{D}_{l,i-1} - 2|\mathbf{D}_{l,i}|)}_{\text{colonne } i} \right) \right)$$

Dans le cas où aucun contour particulier n'a été détecté à partir de la matrice \mathbf{C} , cela signifie que $|\mathbf{A}|$ est une matrice pleine. Ce cas peut correspondre, soit à l'absence de sources,

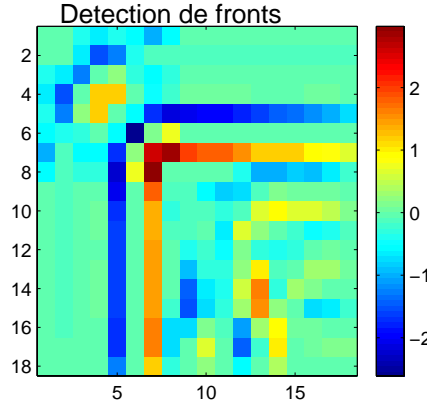
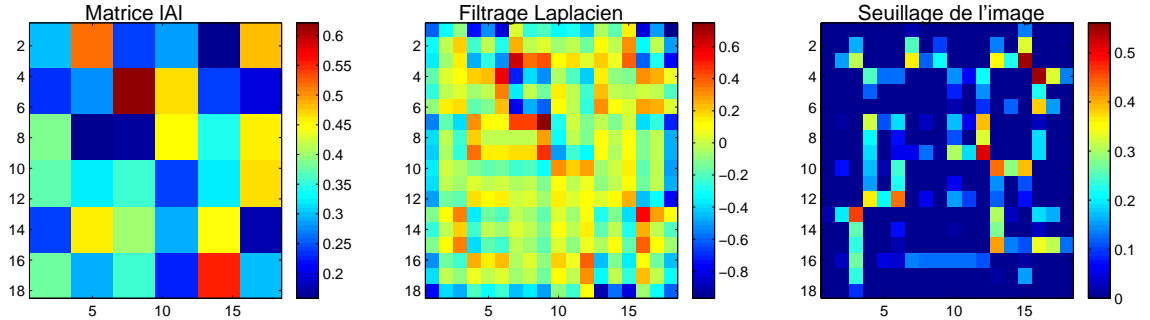


FIG. 6.5: Image \mathbf{D} résultant du filtrage de Sobel de \mathbf{C}

soit à la présence de n sources. Pour lever l'ambiguïté nous supposons que le nombre de capteurs est toujours strictement supérieur au nombre de sources.

Prenons l'exemple de 0 source. Comme détaillé précédemment, nous appliquons les étapes de filtrage Laplacien et de seuillage. On remarque sur l'image seuillée, qu'il n'y a aucun contour fermé. Le critère indiquera qu'il existe aucune source.



Le critère heuristique permet donc de déterminer la présence de 0 à $(n - 1)$ sources. Pour améliorer la stabilité de la méthode nous utilisons les DVS de deux Matrices Spectrales Décalées (retards τ_1 et τ_2) de façon à disposer de 4 matrices de vecteurs propres et à obtenir $|\mathbf{A}|$ par la moyenne de 12 produits scalaires. Ceci permet de s'assurer que les contours de $|\mathbf{A}_2|$ ne possèdent pas de "trous", c'est-à-dire de valeurs faibles. Ceci permet de réduire le risque, même faible, d'obtenir deux vecteurs singuliers à droite et à gauche, strictement orthogonaux. La détection est ainsi améliorée. Des résultats de simulation montrent les performances de la méthode dans le dernier paragraphe.

6.4.3 Distance entre sous-espaces

Revenons à la DVS de $\widehat{\mathbf{R}}_{\text{rr}}^{\tau}$ donnée par la relation (6.16) où $\mathbf{D}^{1/2}$ est une matrice diagonale de taille $(c \times c)$ associée aux c premières colonnes des matrices de vecteurs singuliers \mathbf{E}^l et

\mathbf{F}' . Ces colonnes définissent les sous-matrices \mathbf{E}'_c et \mathbf{F}'_c représentant des directions principales d'énergie. Si $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}$ est obtenue avec un temps d'intégration et un retard suffisants, ces directions d'énergie sont fortement imposées par les sources tandis que les $(n - c)$ suivantes le sont faiblement. Il existe donc une partition remarquable des matrices de vecteurs singuliers ; nous la dénommons *partition d'indice c* :

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \mathbf{E}'_c & \overline{\mathbf{E}}'_c \\ n \times c & n \times (n-c) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \mathbf{F}'_c & \overline{\mathbf{F}}'_c \\ n \times c & n \times (n-c) \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Dans cette écriture, \mathbf{E}'_c et \mathbf{F}'_c constituent une estimation des bases \mathbf{E}_c et \mathbf{F}_c du sous-espace signal \mathcal{E}_s . Ces bases engendrent des sous-espaces "proches", notés $\mathfrak{S}(\mathbf{E}'_c)$ et $\mathfrak{S}(\mathbf{F}'_c)$. Si l'estimation est parfaite alors la seule partition pour laquelle \mathbf{E}'_k et \mathbf{F}'_k engendrent le même sous-espace est celle d'indice k égal à c . Ce lien particulier va permettre de déterminer la dimension de \mathcal{E}_s en comparant toutes les partitions d'indice k :

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \mathbf{E}'_k & \overline{\mathbf{E}}'_k \\ n \times k & n \times (n-k) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}' = \begin{bmatrix} \mathbf{F}'_k & \overline{\mathbf{F}}'_k \\ n \times k & n \times (n-k) \end{bmatrix}, \quad k = 0 \dots n,$$

à l'aide d'une mesure de proximité entre $\mathfrak{S}(\mathbf{E}'_k)$ et $\mathfrak{S}(\mathbf{F}'_k)$. D'après [GL83, p 21], la proximité entre deux sous-espaces vectoriels de même dimension peut se mesurer par une distance (**Définition 1**).

Définition 1. La distance entre deux s.e.v. de même dimension S_1 et S_2 de projecteurs orthogonaux P_1 et P_2 est définie par $\text{dist}(S_1, S_2) = \|P_1 - P_2\|_2$ où $\|\cdot\|_2$ est la norme-2 matricielle.

Le projecteur orthogonal sur un espace vectoriel est défini de façon par $\mathbf{X}\mathbf{X}^+$ ou \mathbf{X} est une base orthonormée quelconque de cet espace. La distance entre $\mathfrak{S}(\mathbf{E}'_k)$ et $\mathfrak{S}(\mathbf{F}'_k)$ est donc définie par :

$$d_k = d(\mathfrak{S}(\mathbf{E}'_k), \mathfrak{S}(\mathbf{F}'_k)) = \|\mathbf{E}'_k \mathbf{E}'_k{}^+ - \mathbf{F}'_k \mathbf{F}'_k{}^+\|_2. \quad (6.19)$$

On montre [GL83, p23] que cette distance s'obtient aussi à l'aide de la plus petite valeur singulière de $\mathbf{F}'_k{}^+ \mathbf{E}'_k$ notée $\sigma_{\min}(\mathbf{F}'_k{}^+ \mathbf{E}'_k)$.

$$d_k = \sqrt{1 - \sigma_{\min}^2(\mathbf{F}'_k{}^+ \mathbf{E}'_k)}. \quad (6.20)$$

Cette valeur singulière est associée au cosinus du plus grand angle de la décomposition C-S de :

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{F}'_k{}^+ \mathbf{E}'_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F}'_k{}^+ \mathbf{E}'_k & \mathbf{F}'_k{}^+ \overline{\mathbf{E}}'_k \\ \overline{\mathbf{F}}'_k{}^+ \mathbf{E}'_k & \overline{\mathbf{F}}'_k{}^+ \overline{\mathbf{E}}'_k \end{bmatrix}$$

Etudions, dans un premier temps, quelques propriétés intéressantes de cette distance lorsque l'estimation des bases \mathbf{E}_c et \mathbf{F}_c est parfaite. Nous précisons ensuite sous quelles conditions elle permet de définir un critère applicable à \mathbf{E}' et \mathbf{F}' .

Si la partition (6.18) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{E}_c, \overline{\mathbf{E}}'_c] \quad \text{et} \quad \mathbf{F}' = [\mathbf{F}_c, \overline{\mathbf{F}}'_c],$$

alors la distance d_k s'annule pour $k = c$ puisque les bases \mathbf{E}_c et \mathbf{F}_c engendrent toutes deux le sous-espace signal. La démonstration est directe en rappelant que :

$$\mathbf{R}_{\text{rr}}^\tau = \mathbf{E}_c \Lambda^{1/2} \mathbf{F}_c^+ \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{E}_c = \mathbf{V} \mathbf{Y} \\ \mathbf{F}_c = \mathbf{V} \mathbf{Z} \end{cases} \quad (6.21)$$

\mathbf{E}_c et \mathbf{F}_c sont liés à \mathbf{V} par une transformation orthogonale \mathbf{Z} ou \mathbf{Y} si la Matrice Spectrale Décalée des sources θ n'est pas proportionnelle à l'identité.

$$d_c = \|\mathbf{E}_c \mathbf{E}_c^+ - \mathbf{F}_c \mathbf{F}_c^+\|_2 = \left\| \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^+ \mathbf{V}^+}_{\mathbf{I}_c} - \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{Z} \mathbf{Z}^+ \mathbf{V}^+}_{\mathbf{I}_c} \right\|_2 = 0 \quad (6.22)$$

Si la matrice θ n'est pas proportionnelle à l'identité, l'indice $k = c$ est le seul qui annule la distance (6.19). Dans la pratique, les estimées de \mathbf{E}'_c et \mathbf{F}'_c n'engendrent pas exactement le même s.e.v., il faut donc minimiser une distance entre sous-espaces. Du point de vue numérique, l'estimation de c est obtenue par

$$\hat{c} = \arg \left[\min_k (d_k) \right]$$

Ce critère permet de déterminer entre 1 et $n - 1$ sources, car d'une part il existe toujours un minimum et d'autre part pour $k = n$ la distance est toujours nulle ($\mathbf{E}_n = \mathbf{E}$ et $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}$ sont deux bases de l'espace complet).

6.5 Résultats de simulation

Nous avons simulé le cas de bruits spatialement blancs pour pouvoir comparer les nouvelles méthodes aux critères AIC et MDL et le cas de bruits spatialement corrélés. Deux fréquences pures proches filtrées par des filtres AR1 sont reçues sur six capteurs. Les observations sont perturbées par des bruits gaussiens temporellement blancs. Les TFD sont calculées sur des blocs de 64 échantillons fournissant une résolution de $\frac{1}{64} \approx 0.016$ en fréquence réduite. Les fréquences réduites des sources étant $\nu_1 = 0.10$ et $\nu_2 = 0.11$, une analyse spectrale à cette résolution ne permet pas de les dissocier. Les traitements sont réalisés au canal de fréquence centrale $\frac{f}{N} = 0.11$ pour différents RSB compris entre -20dB et 0dB. Les matrices spectrales sont estimées sur 600 blocs. Le retard τ est de 67 échantillons. Nous mesurons des probabilités de succès (probabilité d'estimation correcte ici : $\Pr[\hat{c} = 2]$) estimées à l'aide de 100 réalisations pour chaque niveau de bruit.

La figure 6.6 donne des probabilités de succès en fonction du RSB dans le cas de bruits spatialement blancs. La méthode heuristique qui utilise des traitements d'image est notée ti et la méthode par distance minimale entre sous-espaces qui utilise les projecteurs orthogonaux est notée po . On constate la supériorité de la méthode par distance entre sous-espaces. La probabilité de succès est cependant proche de 1 jusqu'à un RSB de -10dB.

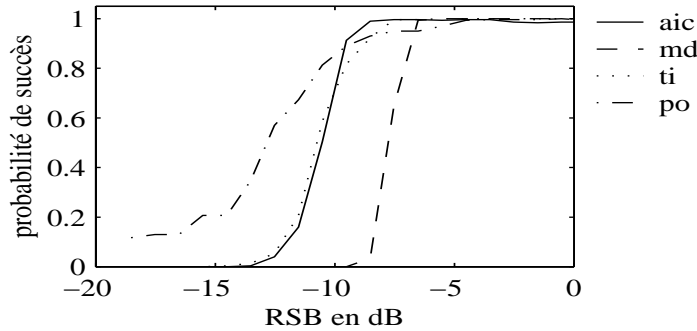


FIG. 6.6: probabilité de succès : bruits blancs gaussiens

La figure 6.7 donne les probabilités de succès en fonction du RSB dans le cas de bruits spatialement corrélés. On constate que les performances de nos deux critères sont peu affectées par la présence de bruits spatialement corrélés. Les méthodes AIC et MDL (non représentées) ne fonctionnent absolument pas, dans ce contexte.

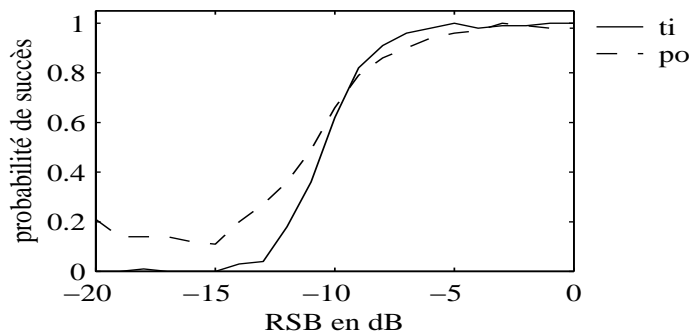


FIG. 6.7: probabilité de succès : bruits colorés

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux mélanges MIMO (Multiple Input Multiple Output) perturbés par des bruits spatialement corrélés. Le problème était de déterminer le nombre de composantes mélangées par bande de fréquence. En supposant que les supports de corrélation des sources sont plus grands que ceux des bruits, nous avons développé une

méthode qui utilise un retard pour supprimer l'influence du bruit. Aucune hypothèse n'est nécessaire, concernant les lois des bruits. Contrairement aux méthodes classiques qui exploitent les valeurs propres d'une matrice de covariance, ces critères exploitent les vecteurs singuliers d'une Matrice Spectrale Décalée. Nous avons proposé deux critères pour retrouver la dimension du sous-espace signal à partir des vecteurs singuliers. Nos critères sont robustes aux corrélations spatiales des bruits et permettent d'envisager de faibles valeurs de RSB. Dans le cas de bruits spatialement blancs, ces critères donnent de meilleurs résultats que les méthodes classiques (AIC et MDL).

Troisième partie

**APPLICATION A DES SIGNAUX
EXPERIMENTAUX**

Chapitre 7

Traitement de signaux réels

7.1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons conçu un séparateur de signaux adapté à un modèle particulier de signaux vibratoires. Etudions maintenant son comportement sur des signaux issus d'un banc de test de la Direction Générale pour l'Armement. Outre les écarts au modèle, l'algorithme est soumis au choix des paramètres et du jeu de capteurs.

Après une présentation du banc et des signaux temporels, une analyse spectrale révèle la présence de sources à spectre de raies et de bruits non temporellement blancs. La confrontation des spectres et des cohérences indique que de nombreux canaux fréquentiels voient des mélanges de sources. La bicohérence montre l'existence de phénomènes non linéaires. Une analyse spectrale haute résolution indique la forme spectrale fine des sources dans 2 canaux fréquentiels. La présence de raies étroites (hypothèses du chapitre 1) est confirmée. Nous détectons aussi des raies modulées en fréquence.

La suite de l'étude est focalisée sur un canal de mélange. Nos estimateurs étant basés sur des Matrices Spectrales Décalées (MSD), nous vérifions leur robustesse vis-à-vis du choix du décalage temporel. Sur la base d'un blanchiment spatial efficace nous comparons la seconde étape de séparation utilisant elle aussi une MSD, à l'algorithme JADE qui utilise des statistiques d'ordre supérieur.

7.2 Présentation de l'expérimentation

Un banc (figure 7.1) a été instrumenté à l'aide de 14 capteurs. Il est composé de 2 ensembles identiques de machines tournantes montées sur un bâti à l'intérieur d'une structure. Ces deux ensembles sont mécaniquement indépendants mais électriquement synchronisés (rapport des vitesses de rotation : 0.999). Des accéléromètres sont disposés sur la structure (S4, S5, T1), sur des pompes reliées au réducteurs (L1,L2), sur les réducteurs (R1,R2), sur une pompe (P1) du bâti reliée au réducteur par un accouplement glissant et sur les moteurs électriques (M1,M2). En régime stationnaire, les machines émettent des signaux vibratoires de fréquences proches qui se propagent jusqu'aux accéléromètres et fournissent, par sommation, des signaux de

mélange. Des signaux électriques sont aussi prélevés par des pinces ampèremétriques placées en sortie des alternateurs (A1, A2) et sur deux alimentations indépendantes (B1, B2). Les mélanges vibratoires sont mesurés par des accéléromètres. On souhaite retrouver la signature spectrale de chaque machine lorsqu'elles sont toutes en fonctionnement.

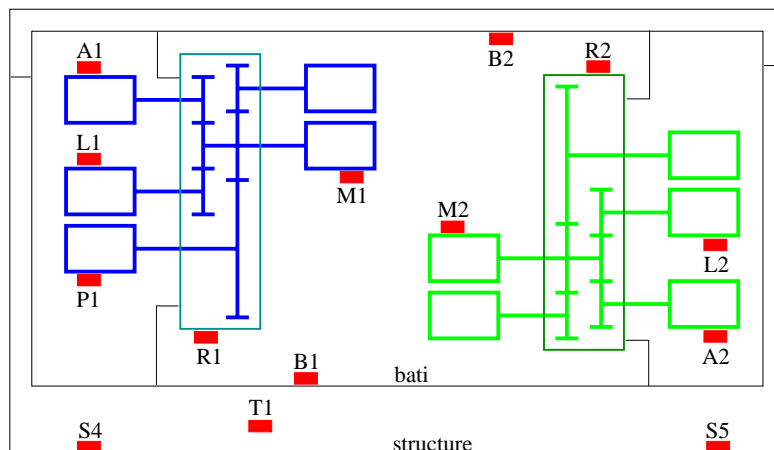


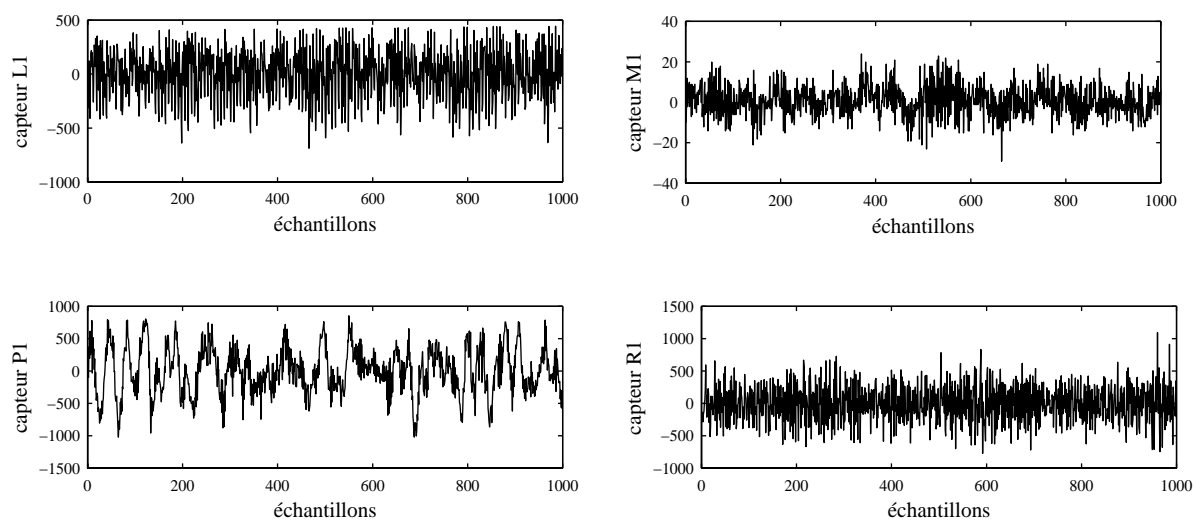
FIG. 7.1: Schéma du banc d'essai

7.3 Analyse des signaux et étude des sources présentes

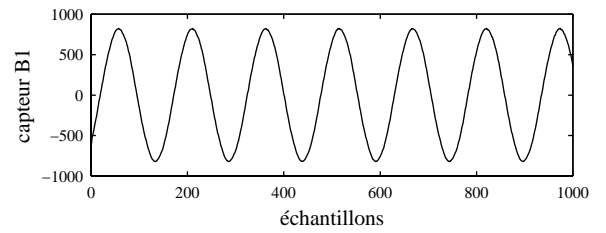
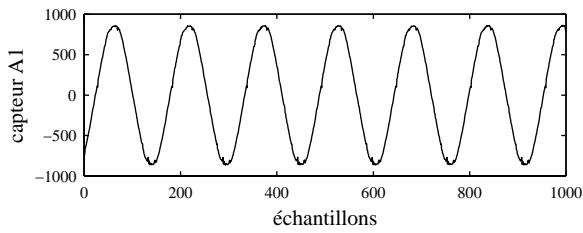
7.3.1 Allure temporelle des signaux

Les figures ci-dessous présentent les 1000 premiers échantillons temporels des 14 capteurs. Nous constatons que les niveaux d'énergie sont très disparates. Les capteurs accélérométriques semblent fortement bruités.

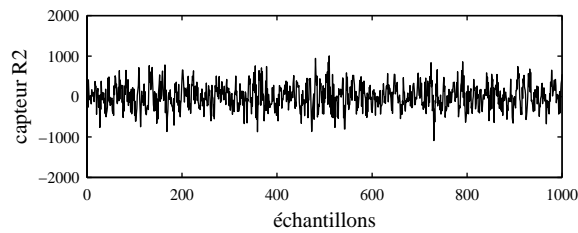
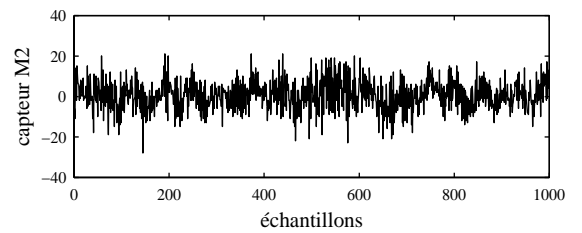
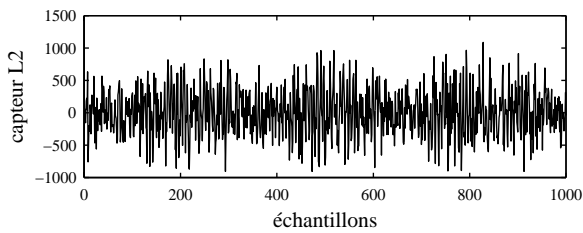
Signaux accélérométriques de l'ensemble 1 :



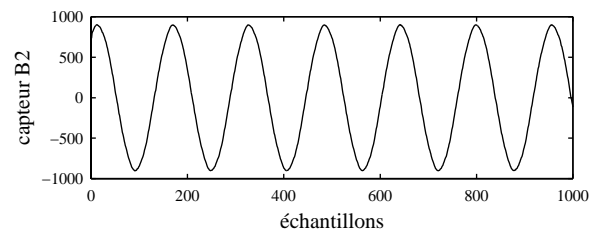
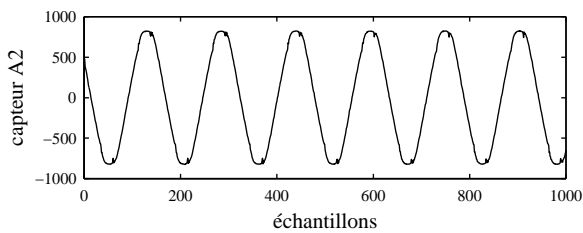
Signaux électriques de l'ensemble 1 :



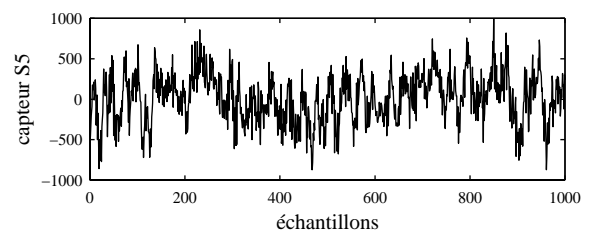
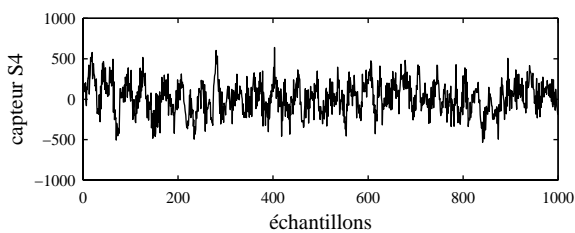
Signaux accélérométriques de l'ensemble 2 :

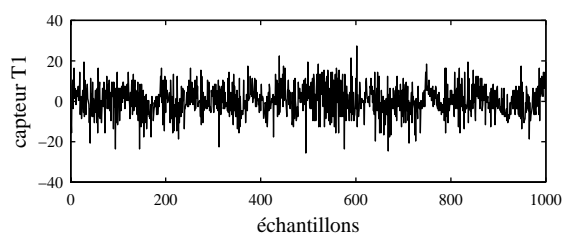


Signaux électriques de l'ensemble 2 :



Signaux accélérométriques du socle :





7.3.2 Etude des spectres

Les figures 7.2 à 7.6 présentent les dsp par catégorie de capteurs et par ensemble de machines. Ces spectres sont estimés à l'aide de TFD de 4096 échantillons par périodogramme lissé (fenêtre de Hanning) et moyenné (100 blocs glissants par pas de 1024 échantillons). Nous visualisons les 250 premiers canaux fréquentiels, soit la bande $[0, 0.06]$ en fréquence réduite.

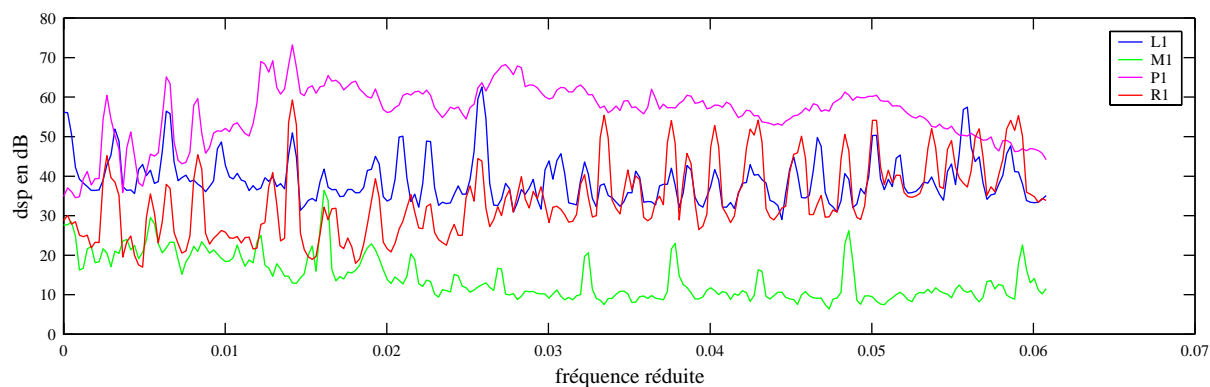


FIG. 7.2: dsp des signaux accélérométriques de l'ensemble 1 ($N=4096$)

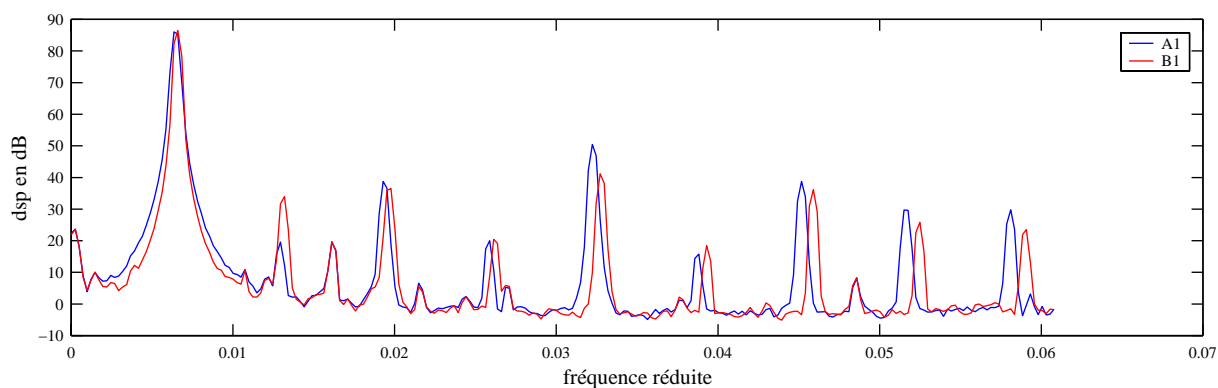


FIG. 7.3: dsp des signaux électriques de l'ensemble 1 ($N=4096$)

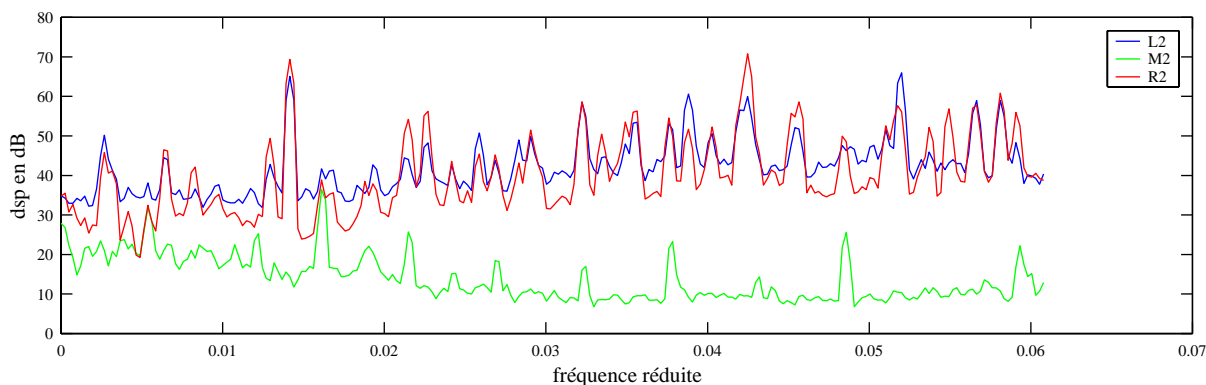


FIG. 7.4: dsp des signaux accélérométriques de l'ensemble 2 (N=4096)

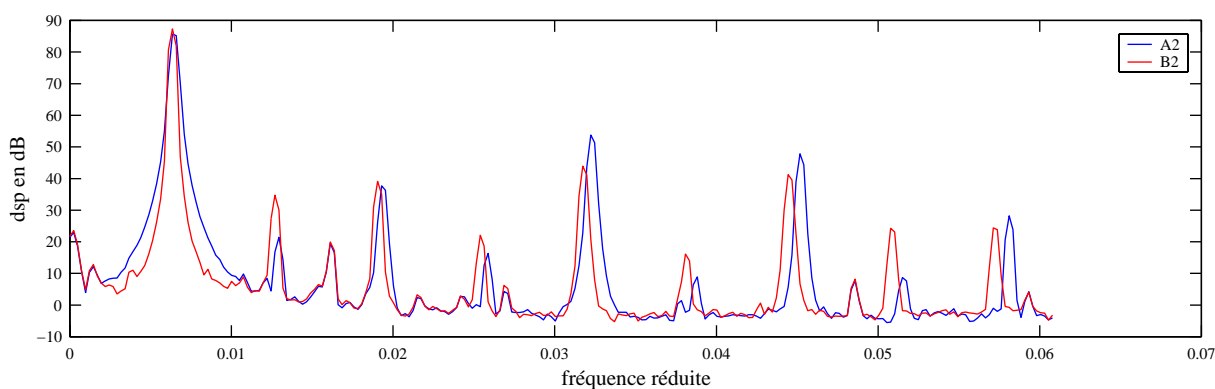


FIG. 7.5: dsp des signaux électriques de l'ensemble 2 (N=4096)

On constate sur les figures précédentes que, pour les accéléromètres, l'allure des fonds de spectre met en défaut l'hypothèse de bruits temporellement blancs et de même puissance. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce sujet. La corrélation spatiale des bruits est en revanche difficile à prouver. Il faudrait trouver une résolution pour laquelle tous les capteurs possèdent un même canal sans source, puis faire l'étude des cohérences inter-capteurs dans ce canal. Comme nous l'avons montré au **chapitre 5**, les niveaux de bruits différents entre capteurs justifient à eux seuls l'emploi de notre séparateur.

Les signaux accélérométriques possèdent de nombreuses raies spectrales (figures 7.2, 7.4 et 7.6). On observe que la largeur des raies n'est pas la même dans tous les canaux fréquentiels et que chaque raie se retrouve sur plusieurs capteurs. On peut supposer que les raies larges correspondent à des canaux de mélange (sommées de raies fines adjacentes non résolues). Pour vérifier cette hypothèse nous ferons appel aux cohérences inter-capteurs ainsi qu'à un zoom fréquentiel.

Les signaux électriques ont une forte dynamique spectrale (figures 7.3 et 7.5). De ce fait de nombreuses raies de faibles amplitudes sont cachées, mais nous verrons que les cohérences inter-capteurs permettent parfois de les déceler. Sur chaque capteur électrique on observe

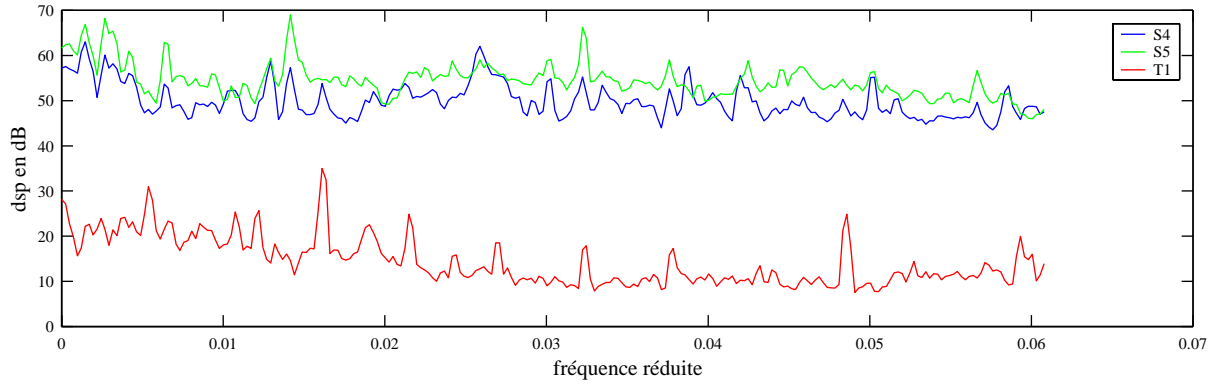


FIG. 7.6: dsp des signaux accélérométriques du socle (N=4096)

essentiellement une famille d'harmoniques et quelques raies disséminées. La famille d'harmoniques de A1 est décalée de celle de B1. Il en est de même pour A2 et B2. Le décalage est de plus en plus marqué vers les hautes fréquences. Nous tenterons d'expliquer ces observations à l'aide des cohérences et des bicohérences.

7.3.3 Etude des relations linéaires entre capteurs

La cohérence permet de détecter les relations de filtrage linéaire entre capteurs. En supposant que les TFD des signaux x et y au canal fréquentiel centrale $\frac{f}{N}$, notées respectivement $X(f)$ et $Y(f)$, sont des variables aléatoires centrées on peut définir la cohérence ainsi :

$$\rho_{xy}(f) = \frac{\text{E}[X(f)Y^*(f)]}{\sqrt{\text{E}[|X(f)|^2] \cdot \text{E}[|Y(f)|^2]}}$$

Elle vérifie la relation

$$|\rho_{xy}(f)| \leq 1$$

où l'égalité traduit une relation de filtrage linéaire entre x et y :

$$|\rho_{xy}(f)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = \alpha(f) \cdot X(f)$$

Lorsque x et y sont des mélanges de signaux, le module de la cohérence chute. Il peut aller jusqu'à s'annuler (cas de mélanges orthogonaux). Pour des signaux constitués de raies spectrales proches la résolution fréquentielle influe sur le nombre de composantes mélangées dans chaque canal fréquentiel. En théorie, pour ces signaux, plus la résolution est fine et plus les pics de cohérence sont élevés et nombreux (composantes peu mélangées). De ce fait, pour de tels signaux, une observation des cohérences à deux résolutions différentes permet en général de confirmer à la fois la présence de raies proches et l'existence de mélanges à la résolution la plus grossière.

Nous avons réalisé une étude des cohérences dans la bande $[0, 0.06]$. Les cohérences sont estimées par la méthode du périodogramme lissé (fenêtre de Hanning) et moyenné (100 blocs glissants par pas de 1024 échantillons). Les figures 7.7 et 7.8 présentent les cohérences des couples d'accéléromètres (R1,R2) et (R1,S4) à deux résolutions (TFD sur 4096 et 8192 échantillons). Sur ces figures sont aussi représentées les dsp des capteurs pour faciliter l'interprétation des cohérences. Les pics élevés de la cohérence prouvent qu'il existe des transferts mécaniques linéaires entre les deux ensembles de machines et entre chaque ensemble de machines et la structure. On vérifie qu'à la résolution (1/8192) les raies spectrales sont plus nombreuses qu'à la résolution (1/4096) et qu'elles sont associées à des pics de cohérence plus élevés. Cette observation est aussi valable pour les autres capteurs. On a donc la confirmation que les capteurs voient des mélanges de sources à spectre de raies à la résolution 1/4096.

Cependant de nombreuses raies spectrales restent associées à des cohérences faibles, même pour une résolution très fine (1/16384). C'est le cas, par exemple, pour les capteurs R1 et R2 dans la bande $[0.05, 0.06]$. Ces observations peuvent avoir plusieurs explications :

- soit les signaux sont extrêmement riches dans certains canaux et les nombreuses composantes spectrales font chuter la cohérence en module,
- soit des signatures spectrales similaires existent sur les deux ensembles de machines (machines identiques, rapport des vitesses 0.999) faisant croire à des mélanges mais ne se propageant pas d'un ensemble à l'autre (amortissements, isolations électriques),
- soit certaines sources ne sont pas de simples sommes de sinusoïdes (non stationnarités),
- soit le banc se comporte comme un milieu de propagation non linéaire créant, sur des capteurs distincts, des raies similaires à partir de composantes distinctes.

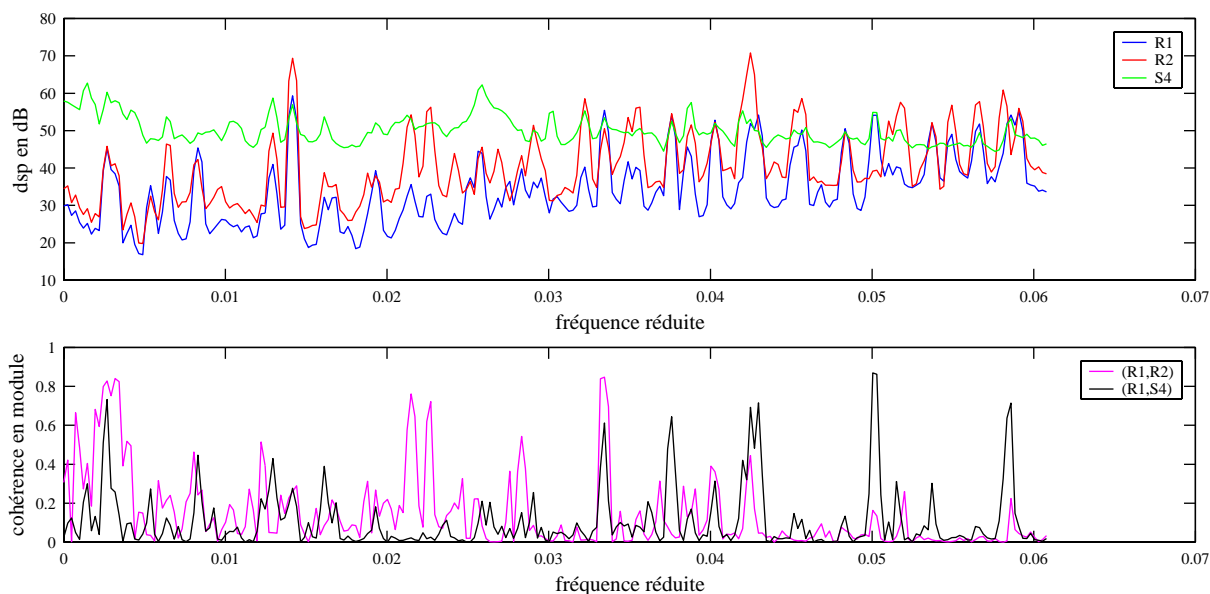


FIG. 7.7: dsp et cohérences de deux couples d'accéléromètres (résolution 1/4096)

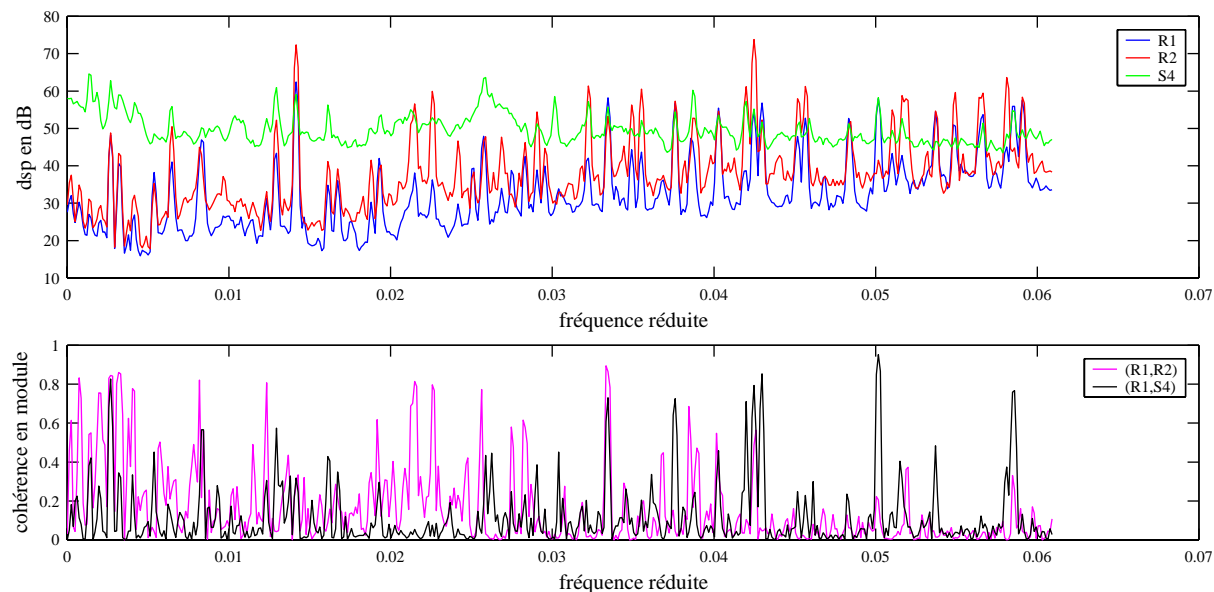


FIG. 7.8: dsp et cohérences de deux couples d'accéléromètres (résolution 1/8192)

Nous essaierons de faire la part des choses à l'aide du zoom fréquentiel, du spectrogramme et des bicohérences. Etudions à présent les transferts entre les signaux électriques puis entre les signaux électriques et accélérométriques. Pour ne pas surcharger le document nous ne présentons que les cohérences à la résolution (1/4096).

La figure 7.9 donne la cohérence et les dsp des courants produits par les alternateurs A1 et A2. Bien que les deux spectres soient semblables, les raies numérotées 1 à 9 (famille d'harmoniques) ne sont pas cohérentes. Ce résultat reste vrai pour des résolutions plus fines. En revanche il existe une famille de raies associées à des pics de cohérence numérotés *a* à *e*. Ces raies sont régulièrement espacées mais elles ne forment pas une famille d'harmoniques. Il est possible que la famille de raies ait été déplacée en fréquence par l'effet d'une modulation. La figure 7.10 montre que les pics *a* à *e* existent aussi sur la cohérence de (A1,B1), (A1,B2) et (B1,B2) tandis que l'on ne retrouve pas les raies 1 à 9. On peut donc penser que ces deux familles de raies ont des origines physiques différentes. Nous verrons ultérieurement que les raies *a* à *e* se retrouvent aussi sur de nombreux accéléromètres. Ceci autorise à penser qu'elles résultent de phénomènes vibratoires qui se sont propagés linéairement jusqu'aux machines électriques puis ont été convertis linéairement en courants (forces de Laplace). Les familles de raies d'indices 1 à 9 des courants A1, A2, B1 et B2 sont vraisemblablement des signatures propres aux machines électriques. Elles ne se propagent pas d'une pince ampèremétrique à une autre certainement parce que les réseaux électriques concernés sont bien isolés. Le rapport de synchronisation (0.999) différent de 1 suffit pour que les composantes électriques produites par les alternateurs A1 et A2 soient décorréliées. Les raies paraissent identiques sur les spectres de A1 et A2 car un écart de fréquence de un millième n'est pas décelable dans la bande [0, 0.06] à la résolution (1/4096).

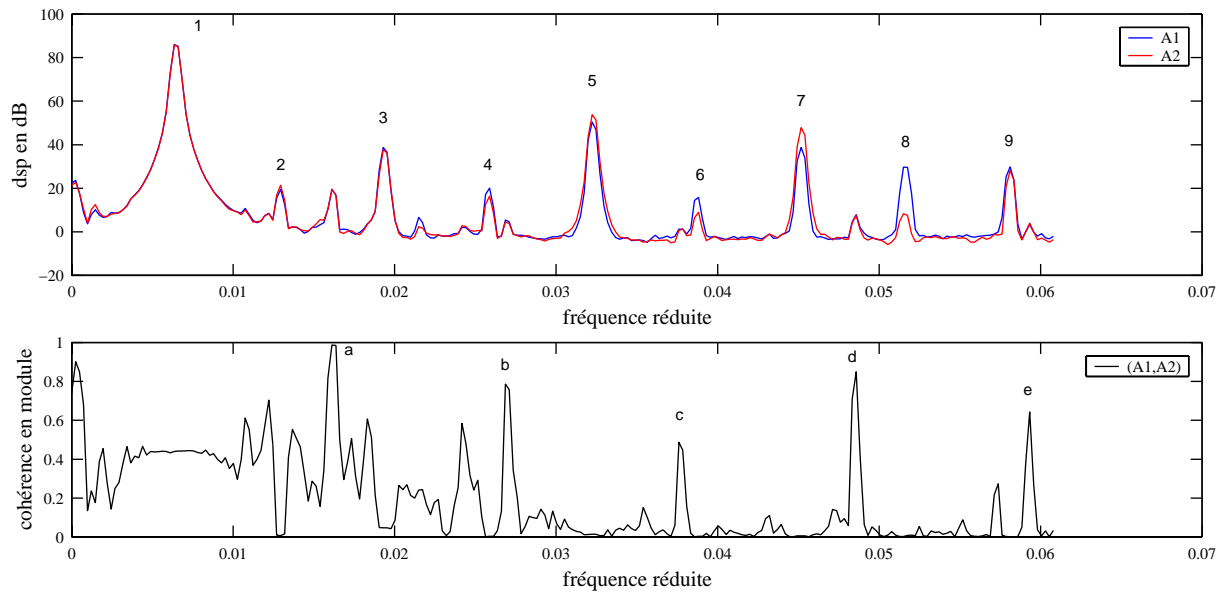


FIG. 7.9: dsp et cohérences des alternateurs (résolution 1/4096)

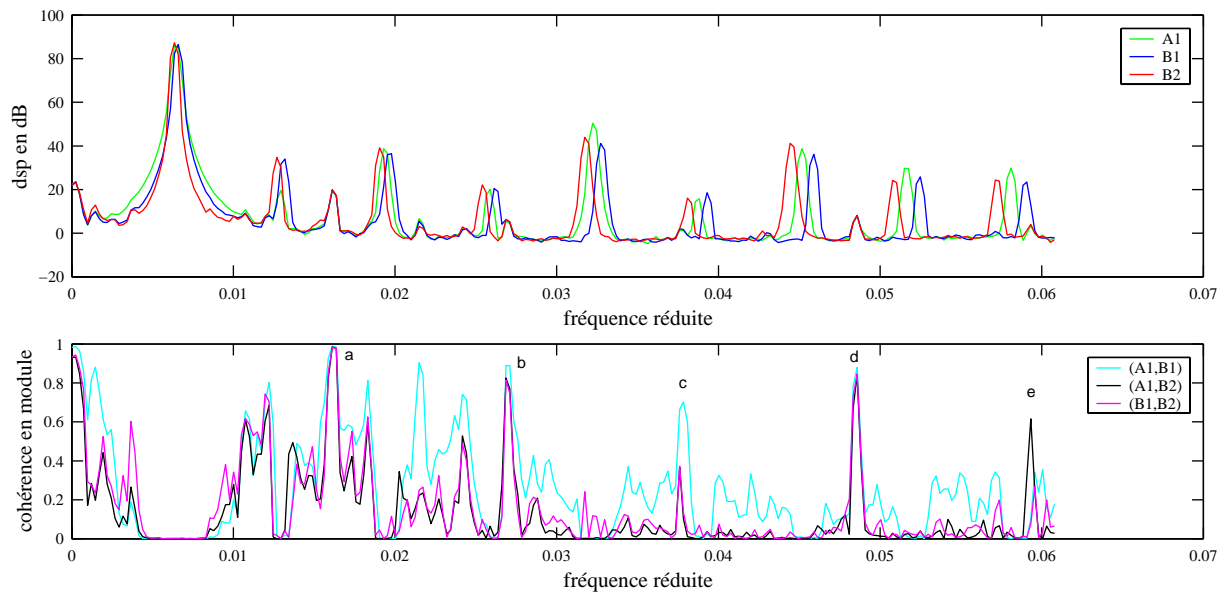


FIG. 7.10: dsp et cohérences des alternateurs et des alimentations électriques (résolution 1/4096)

Sur la figure 7.10 on remarque aussi qu'en allant vers les hautes fréquences les raies spectrales d'indices 1 à 9 de B1 s'écartent de plus en plus de celles de B2. Pourtant, le rapport des fréquences (harmonique d'ordre k de B2 divisé par l'harmonique d'ordre k de B1) est stable autour de 0,971 y compris en dehors de la bande $[0, 0.06]$. Les machines des deux ensembles étant identiques et les moteurs étant synchronisés au millième, la seule explication simple à ce phénomène serait l'existence d'une modulation (décalage du fondamental) suivi d'une non linéarité (création des harmoniques). Ceci nous donne une raison supplémentaire d'étudier ultérieurement l'interbicohérence des signaux électriques.

Par ailleurs, certaines raies des capteurs électriques, parmi lesquelles celles numérotées a à e , se retrouvent cohérentes avec des capteurs accélérométriques des deux ensembles de machines. Ceci est illustré par la figure 7.11 qui présente les cohérences entre l'accéléromètre M1 et les pinces ampèremétriques A1, A2 et B1. Des résultats similaires sont obtenus sur de nombreux autres couples non présentés ici, dont $(M2,A1)$, $(M2,A2)$ et $(M2,B2)$. Il existe donc un transfert linéaire entre les phénomènes électriques et mécaniques.

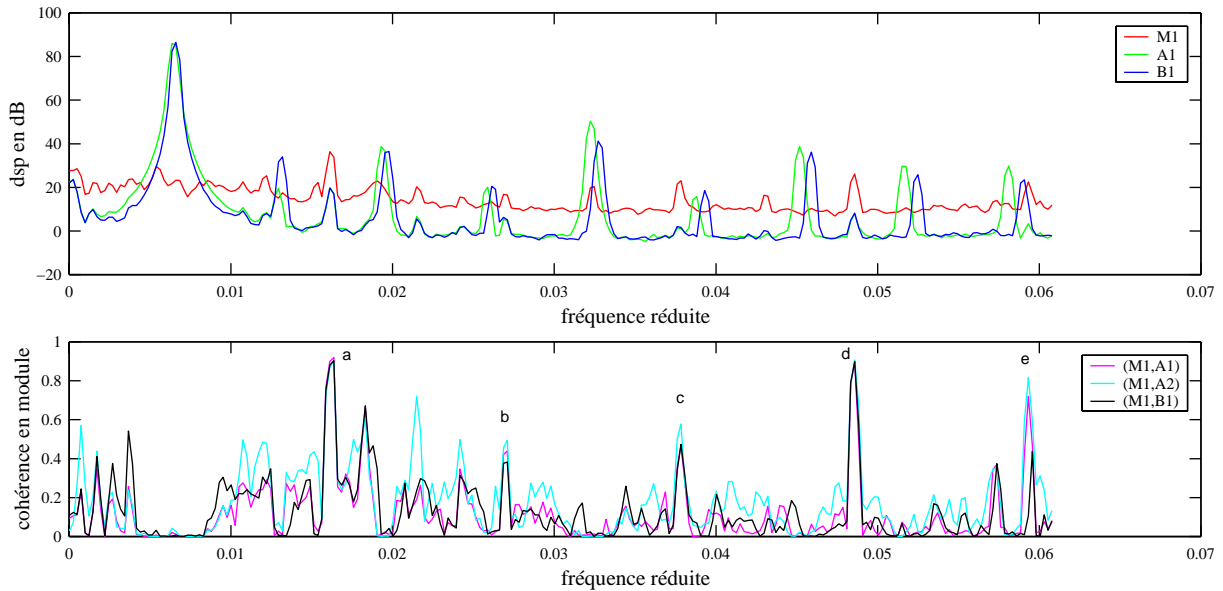


FIG. 7.11: dsp et cohérences de signaux électriques et accélérométriques (résolution 1/4096)

Si l'on se restreint aux raies 1 à 9, la pince ampèremétrique A1 (resp. A2) est cohérente uniquement avec les accéléromètres L1,P1,R1 et S4 (resp. L2, R2, S4 et S5). La figure 7.12 présente les cohérences des couples $(L1,A1)$ et $(L1,A2)$. Les pics de cohérences de $(L1,A1)$ prouvent que la transformation entre les phénomènes électriques de A1 et mécaniques de L1 est linéaire. La faible cohérence de $(L1,A2)$ illustre le fait que les raies 1 à 9 ne passent pas d'un ensemble de machines à l'autre. Des résultats similaires s'observent sur les couples $(L2,A1)$ et $(L2,A2)$.

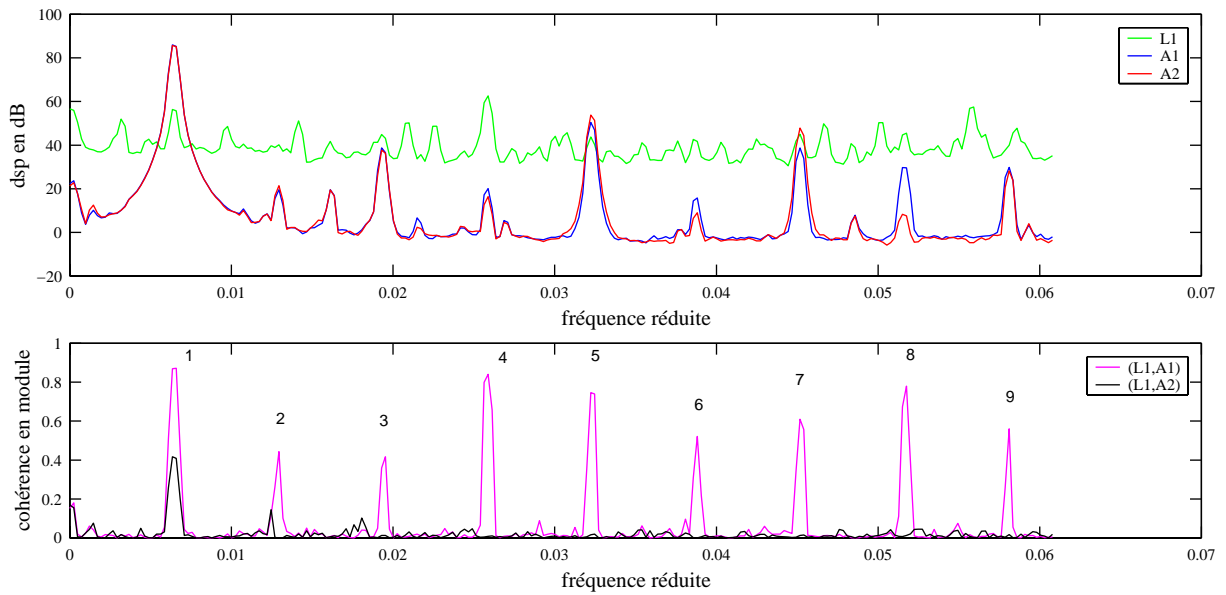


FIG. 7.12: dsp et cohérences des signaux électriques des alternateurs et d'un signal accélérométrique (résolution 1/4096)

Par ailleurs les composantes 1 à 9 des pinces ampèremétriques B1 et B2 ne se retrouvent sur aucun accéléromètre. Aux autres fréquences, B1 et B2 sont cohérents avec peu de capteurs accélérométriques (B1 est cohérent avec L2, M1 et T1 : figure 7.13 ; B2 est cohérent avec M1, M2 et T1) et le niveau de cohérence est faible.

En conclusion l'étude des cohérences nous a révélé :

- l'existence de transferts mécaniques linéaires entre les deux ensembles de machines et entre chaque ensemble de machines et la structure,
- l'existence de mélanges de sources à spectre de raies, dans les canaux fréquentiels, à la résolution (1/4096),
- l'existence de transformations linéaires entre les phénomènes électriques et mécaniques.

D'autre part nous émettons les hypothèses suivantes :

- la famille de raies a à e est d'origine mécanique et se propage linéairement vers les machines électriques où il y a transformation mécanique-électrique linéaire,
- les familles de raies d'indices 1 à 9 des courants A1, A2, B1 et B2 sont des signatures propres aux machines électriques. Elles ne sont pas cohérentes d'une pince ampèremétrique à une autre parce que ces machines sont sur des réseaux électriques isolés,
- les familles de raies d'indices 1 à 9 (et au delà) observées sur les capteurs A1, A2 sont fortement atténuées lors de la transformation électrique-mécanique, de ce fait elles se retrouvent seulement sur les accéléromètres les plus proches,
- nous suspectons l'existence d'une modulation (décalage du fondamental) suivi d'une non linéarité (création des harmoniques) sur les alimentations B1 et B2.

Nous allons maintenant rechercher les éventuelles non linéarités dans la propagation des

courants et des forces mécaniques ainsi que dans la transformation des courants statoriques (machines électriques) en phénomènes vibratoires (dans [Dér92] on mentionne l'existence de forces de Maxwell proportionnelles au carré de l'induction périodique).

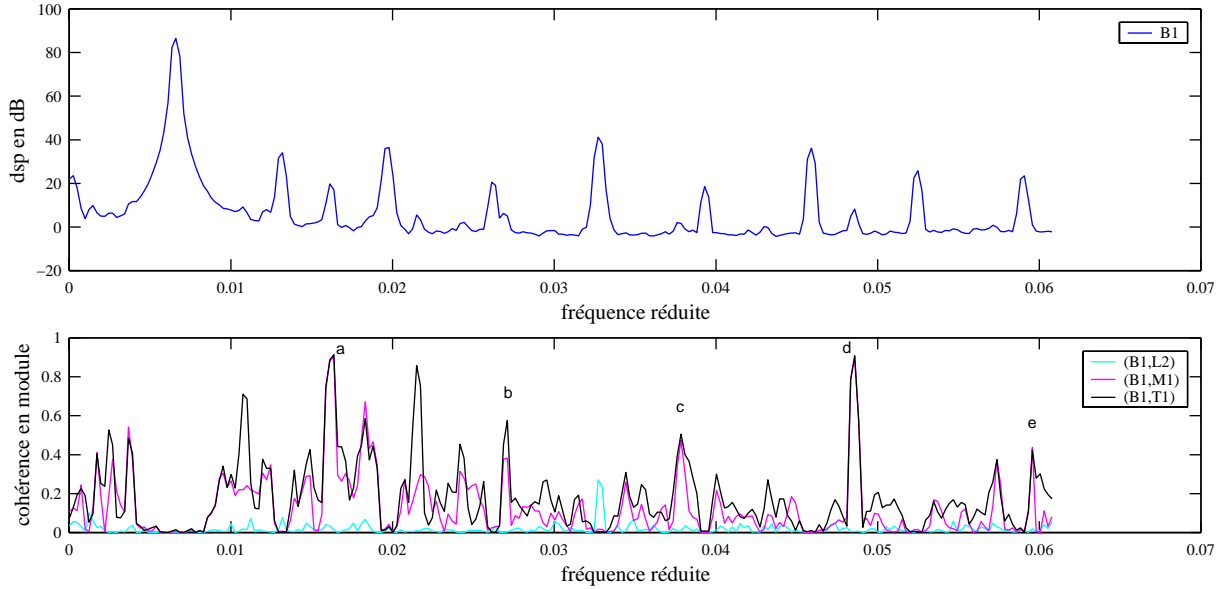


FIG. 7.13: dsp et cohérences d'une alimentation et de signaux accélérométriques (résolution $1/4096$)

7.3.4 Détection de non-linéarités quadratiques

L'autobicohérence et l'interbicohérence sont des outils adaptés à la détection des non linéarités quadratiques [LAC97]. Ils se définissent comme un prolongement de la cohérence. L'interbicohérence caractérise le lien entre les fréquences $\frac{f_1}{N}$ et $\frac{f_2}{N}$ d'un signal x et la fréquence $\frac{f_1+f_2}{N}$ d'un signal y . L'autobicohérence se déduit de l'interbicohérence en remplaçant y par x . En supposant que les signaux x et y sont stationnaires et que leurs TFD au canal de fréquence $\frac{f}{N}$, notées respectivement $X(f)$ et $Y(f)$, sont des variables aléatoires centrées on peut définir l'interbicohérence ainsi :

$$\beta_{xy}(f_1, f_2, f_1 + f_2) = \frac{\mathbb{E}[X(f_1) X(f_2) Y^*(f_1 + f_2)]}{\sqrt{\mathbb{E}[|X(f_1)|^2] \cdot \mathbb{E}[|X(f_2)|^2] \cdot \mathbb{E}[|Y(f_1 + f_2)|^2]}}$$

D'après cette définition si la fréquence $\frac{f_1+f_2}{N}$ de y résulte d'un transfert quadratique des fréquences $\frac{f_1}{N}$ et $\frac{f_2}{N}$ de x alors l'interbicohérence est de module unité :

$$Y(f_1 + f_2) = H(f_1, f_2) \cdot X(f_1) \cdot X(f_2) \quad \Rightarrow \quad |\beta_{xy}(f_1, f_2, f_1 + f_2)| = 1$$

Les bicohérences sont estimées à l'aide du périodogramme lissé (fenêtre de Hanning) et moyenné (100 TFD calculées sur des blocs de 4096 échantillons glissants de 1024 échantillons).

Seuls les 250 premiers canaux fréquentiels de x sont considérés (bande de fréquence $[0, 0.06]$). Pour une meilleure lisibilité le module de la bicohérence est forcé à 0 lorsqu'il est inférieur à 0.4.

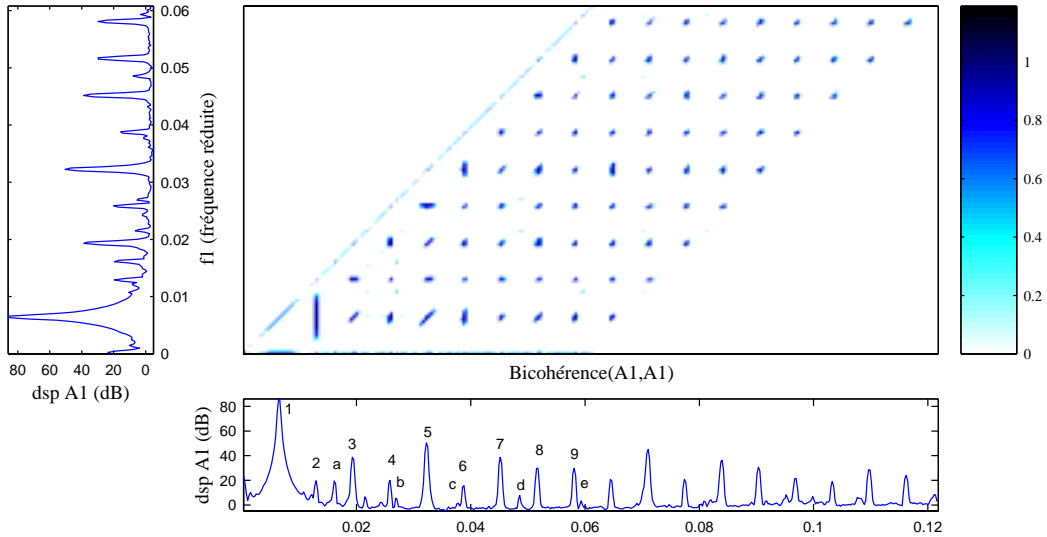


FIG. 7.14: autocohérence du signal ampèremétrique A1

Les figures 7.14 et 7.15 donnent les autocohérences de A1 et de B1. Les résultats sont similaires pour A2 et B2. Le quadrillage du plan fréquentiel montre que les raies 1 à 9 (et au delà) résultent d'une non-linéarité quadratique. Les raies a à e n'étant pas concernées la non-linéarité ne provient pas des capteurs.

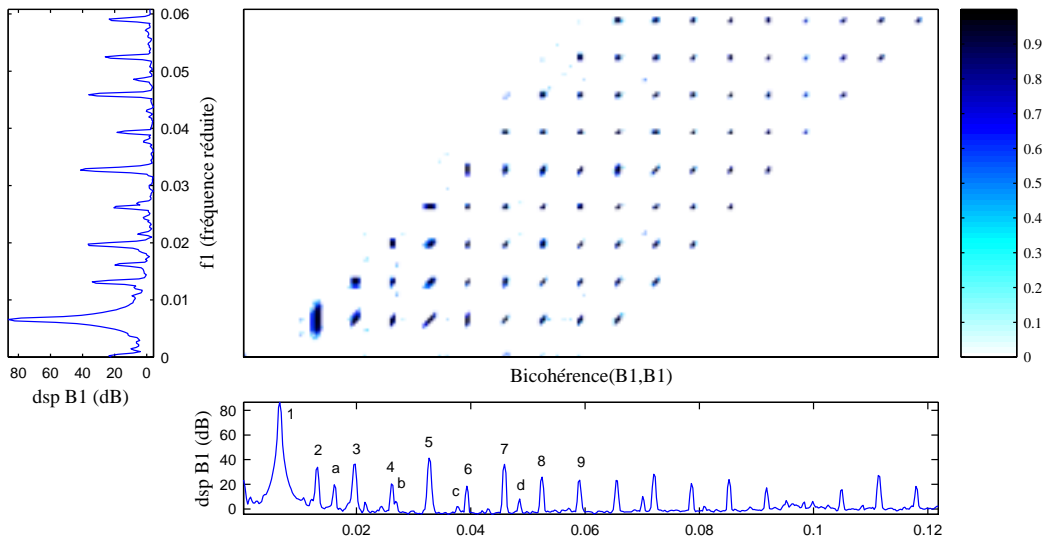


FIG. 7.15: autocohérence du signal ampèremétrique B1

Pour déterminer si une propagation non-linéaire quadratique des courants existe nous avons estimé les interbicohérences des pinces ampèremétriques. Les valeurs obtenues sont faibles à l’instar de l’interbicohérence du couple (A1,B1) de la figure 7.16.

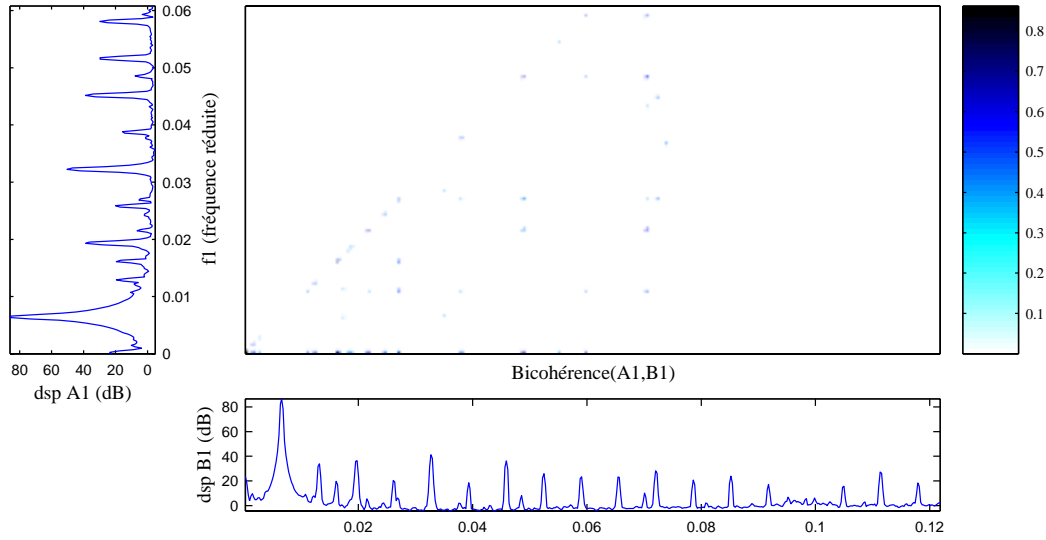


FIG. 7.16: interbicohérence des signaux ampèremétriques A1 et B1

Rappelons que selon [Dér92] les champs électromagnétiques périodiques présents au sein des machines électriques peuvent provoquer des phénomènes vibratoires (forces de Laplace directement liées à l’induction magnétique et forces de Maxwell liées au carré de l’induction). De ce fait et compte tenu des non linéarités détectées sur les capteurs électriques nous avons étudié les interbicohérences entre les pinces ampèremétriques et les accéléromètres. La figure 7.17 donne l’interbicohérence du couple (A1,L1). On retrouve le quadrillage observé sur les autobicohérences des pinces ampèremétriques. Cette observation ne prouve pas que le transfert électrique-mécanique est non linéaire ; elle peut s’expliquer par la propagation linéaire d’une source non linéaire (trois composantes liées statistiquement dans le signal de départ restent liées après filtrage linéaire homogène). On se souvient que la cohérence entre A1 et L1 était forte pour les mêmes composantes spectrales. On peut donc penser que la source vue par A1 est non linéaire et que la propagation de cette source est linéaire. Les interbicohérences des couples (A1,P1), (A1,R1) et (A1,S4) sont semblables à celle de (A1,L1). Pour les autres accéléromètres on obtient quelques pics élevés à l’instar de l’interbicohérence de (A1,L2) présentée à la figure 7.18. Comme la cohérence du couple (A1,L2) était remarquablement faible, on en conclut qu’aux transferts électrique-mécanique linéaires (forces de Laplace) se superposent des transferts non linéaires (forces de Maxwell) moins importants. Les observations faites sur A1 sont aussi valables pour A2.

Par ailleurs les interbicohérences de B1 avec les accéléromètres sont faibles. La plus significative est l’interbicohérence du couple (B1,T1) donnée à la figure 7.19.

Pour connaître l’ampleur des phénomènes non-linéaires “vus” par les accéléromètres nous

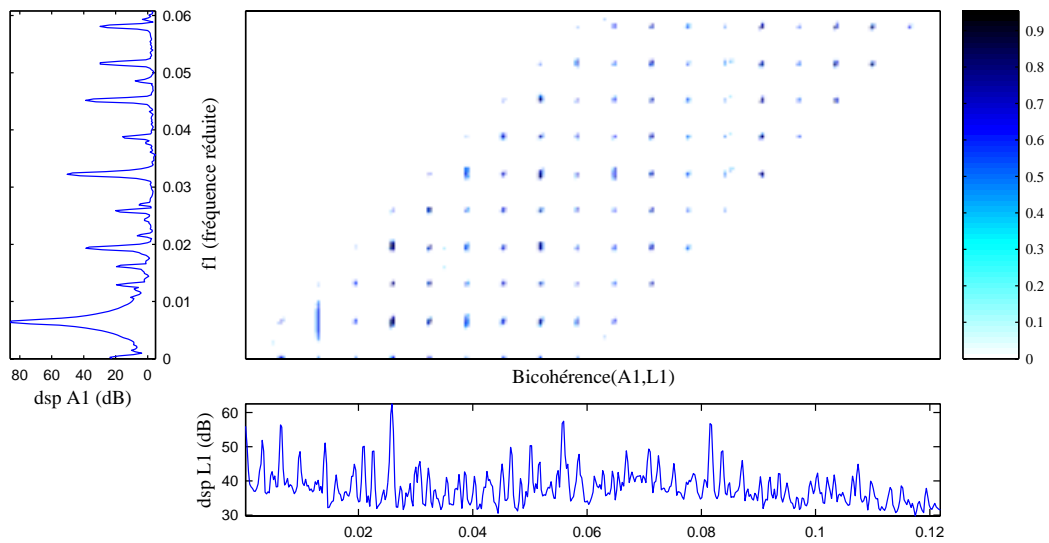


FIG. 7.17: interbicoherence entre le signal électrique A1 et accélérométrique L1

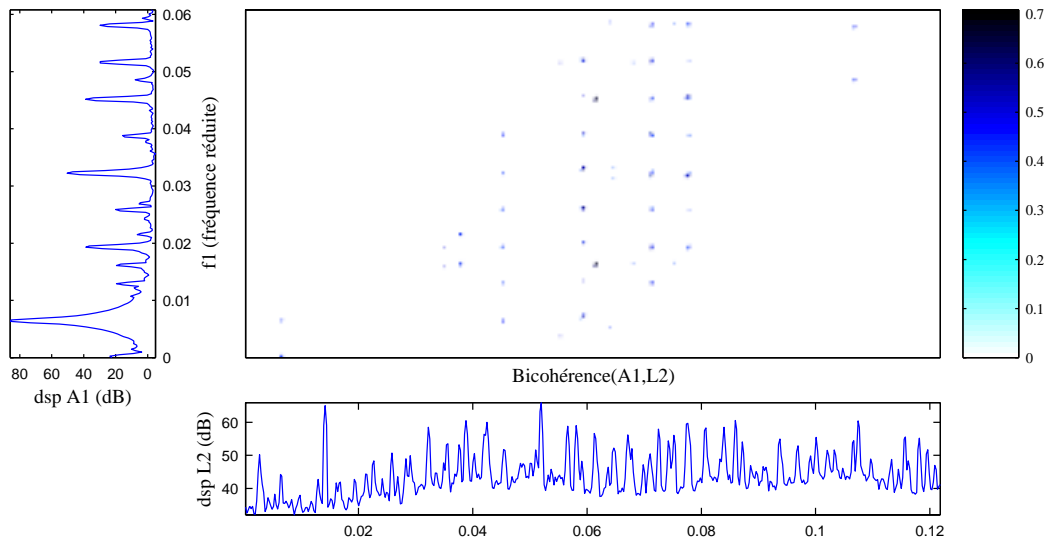


FIG. 7.18: interbicoherence entre le signal électrique A1 et accélérométrique L2

avons étudié les autobicoherences de ces capteurs. La figure 7.20 donne l'autobicoherence de L1 sur laquelle on constate que les liens statistiques entre composantes fréquentielles sont bien plus nombreux qu'avec les signaux électriques. Cela sous-entend qu'il existe aussi des transferts mécaniques non linéaires. Cette hypothèse est confirmée par l'interbicoherence du couple (L1,R1) à la figure 7.21.

L'étude des bicoherences confrontée à celles des cohérences nous a enseigné que :

- Les raies 1 à 9 (et au delà) des signaux électriques résultent d'une non-linéarité quadratique qui ne provient pas des capteurs. Pour A1 et A2 ces familles d'harmoniques sont

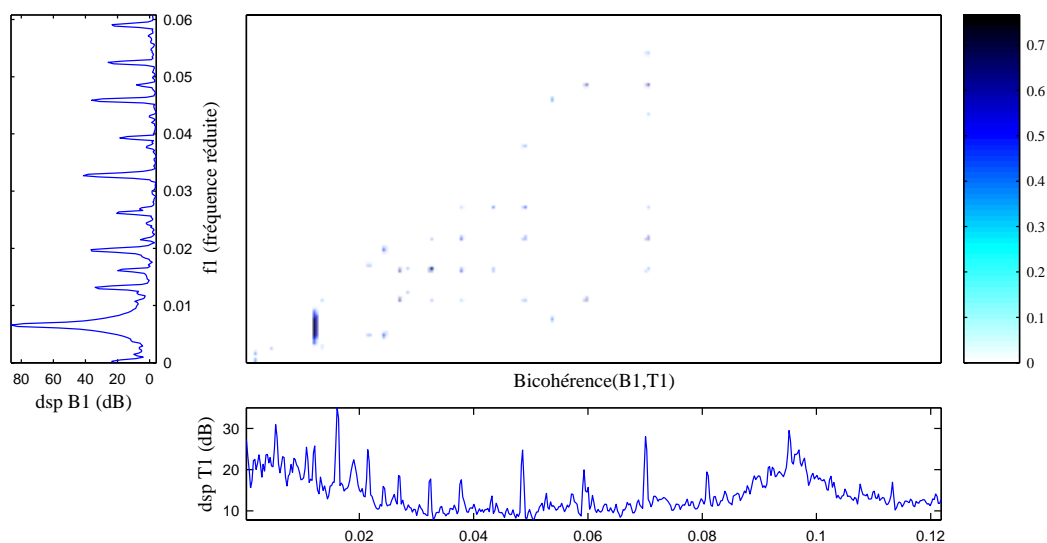


FIG. 7.19: interbicoherence entre le signal électrique B1 et accélérométrique T1

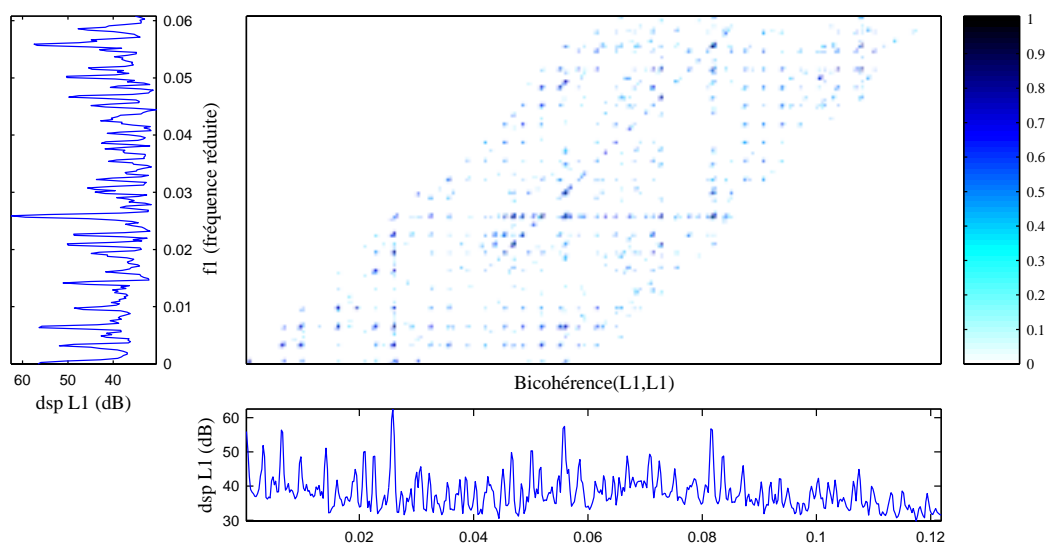


FIG. 7.20: autobicoherence du signal accélérométrique L1

- très certainement les signatures spectrales des machines électriques à régime constant,
- Lors de l'étude des cohérences nous n'avons pas trouvé de relation de filtrage linéaire entre les raies 1 à 9 (et au delà) des signaux électriques. Il n'y a pas non plus de filtrage non-linéaire quadratique entre ces capteurs. Les machines semblent bien appartenir à des réseaux électriques distincts,
 - Les composantes de B1 et B2 proviennent certainement d'un décalage fréquentiel suivi d'une non-linéarité,
 - Les signatures des machines électriques A1 et A2 sont transmises aux capteurs accélé-

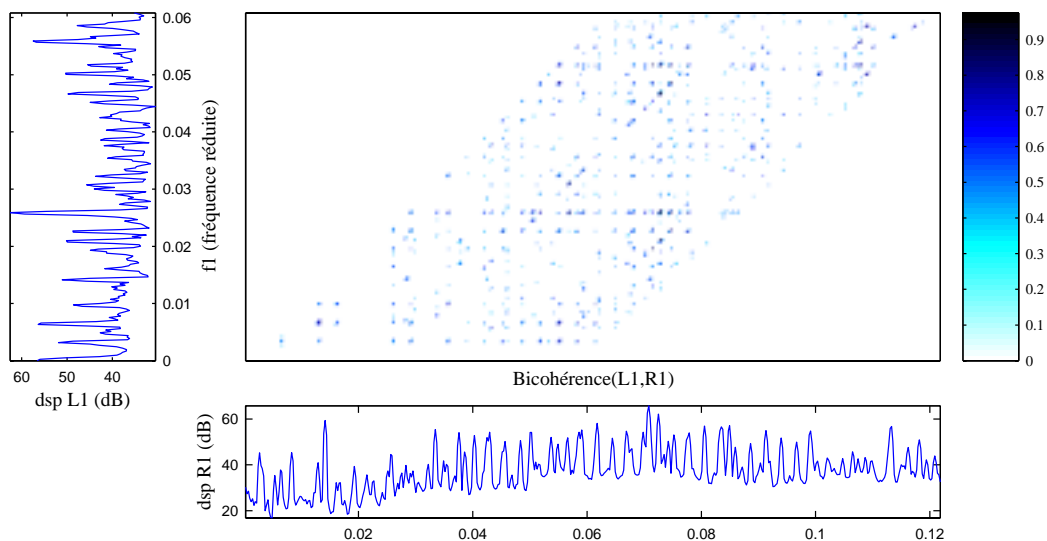


FIG. 7.21: interbicoherence entre les signaux accélérométriques L1 et R1

rométriques de façon linéaire (forces de Laplace) et dans un moindre mesure de façon non-linéaire (forces de Maxwell),

- Des non-linéarités existent aussi sur les accéléromètres.

Nous retiendrons que tous les capteurs fournissent des signaux représentatifs d'un mélange spectral sauf B1 et B2 qui ne possèdent que de rares canaux de mélanges. Notons que les non-linéarités détectées ne perturberont pas la séparation de signaux dans le domaine spectral. En revanche une méthode temporelle de séparation de sources serait pénalisée par les liens statistiques entre les fréquences.

Nous allons maintenant vérifier plus finement le modèle des sources dans un canal, avant d'appliquer nos algorithmes.

7.3.5 Analyse haute résolution d'un canal fréquentiel

Nous souhaitons connaître précisément le contenu de certains canaux fréquentiels pour vérifier le modèle spectral des sources, valider l'estimation du nombre de sources et montrer les résultats du blanchiment et de la séparation. Les canaux concernés sont issus de TFD glissantes calculées sur des blocs de 4096 échantillons apodisés par une fenêtre de Hanning. Nous avons besoin d'un facteur de zoom important pour un petit nombre de canaux. Il est coûteux d'augmenter la taille des blocs à partir desquels sont calculées les TFD à toutes les fréquences. Il est préférable d'appliquer un zoom fréquentiel aux quelques canaux concernés. Nous donnons ici les grandes lignes de cette technique et invitons le lecteur à consulter l'annexe E.1 pour plus de détail.

Notons $X^\tau(f)$ ou $X(f, \tau)$ la TFD d'un signal $x(t)$ au canal de fréquence centrale $\frac{f}{N}$, entre les instants τ et $\tau + N - 1$. La suite des TFD glissantes obtenues en faisant croître τ par pas

de 1 échantillon est un signal complexe à temps discret τ correspondant à une filtrée bande étroite autour de $\frac{f}{N}$. Il contient l'essentiel de son énergie dans la bande $\left[\frac{f-n_0}{N}, \frac{f+n_0}{N}\right]$ où n_0 est un nombre réel donnant la largeur du premier lobe spectral de la fenêtre d'apodisation utilisée (pour une apodisation de Hanning n_0 vaut 2). Le zoom fréquentiel débute par une démodulation complexe par rapport à la fréquence centrale f/N . Cette opération est suivie d'un sous-échantillonnage d'un facteur L par rapport à la variable τ pour obtenir un signal fonction de la variable u . Enfin une TFD est calculée par rapport à cette nouvelle variable temporelle. Le schéma du zoom fréquentiel est rappelé à la figure 7.22. En pratique le sous-échantillonnage est effectué avant la démodulation (le signal temporel filtré par TFD glissante a une bande petite car ses composantes sont les écarts à la fréquence centrale f/N). On utilise un pas de glissement égal au facteur de sous-échantillonnage de façon à réduire le nombre de TFD pour obtenir $X(f, \tau)$.

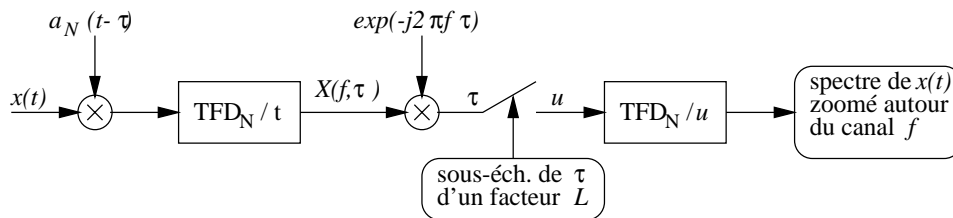


FIG. 7.22: zoom fréquentiel de $x(t)$ d'un facteur L autour de la fréquence centrale f/N

Nous avons effectué le zoom fréquentiel du capteur R2 au canal 213. Ce canal "voit" la bande $[0.0515, 0.0525]$ en fréquence réduite (2 canaux avant et 2 canaux après) car l'apodisation de Hanning a été utilisée. Les figures 7.23 et 7.24 présentent les dsp obtenues respectivement pour un facteur de zoom de 2 puis de 32. L'axe des fréquences a été recentré autour de la fréquence de démodulation pour retrouver les fréquences d'origine du signal temporel.

On voit sur cet exemple que les deux fréquences pures présentes dans le signal sont résolues par un sous-échantillonnage de facteur 32, alors qu'elles ne le sont pas par une analyse spectrale classique. Cet outil permet de mesurer l'importance du bruit dans les canaux fréquentiels, vérifier l'hypothèse de fréquences pures, contrôler l'estimation du nombre de sources et la qualité de la séparation.

7.3.6 Etude de la corrélation temporelle du bruit

Contrairement à la figure 7.24, certains canaux sont fortement bruités. Le zoom fréquentiel ne permet pas nécessairement de distinguer les raies étroites par rapport au bruit. Cette situation est illustrée à la figure 7.25 par le zoom fréquentiel du capteur R1 au canal 229. Comme précédemment les TFD sont effectuées sur 4096 échantillons avec une apodisation de Hanning et un pas de glissement de 32 échantillons.

Nous avons développé une méthode pour déterminer la durée de corrélation du bruit dans un signal à spectre de raies bruité. Cette méthode, présentée en annexe C.1, est basée sur le

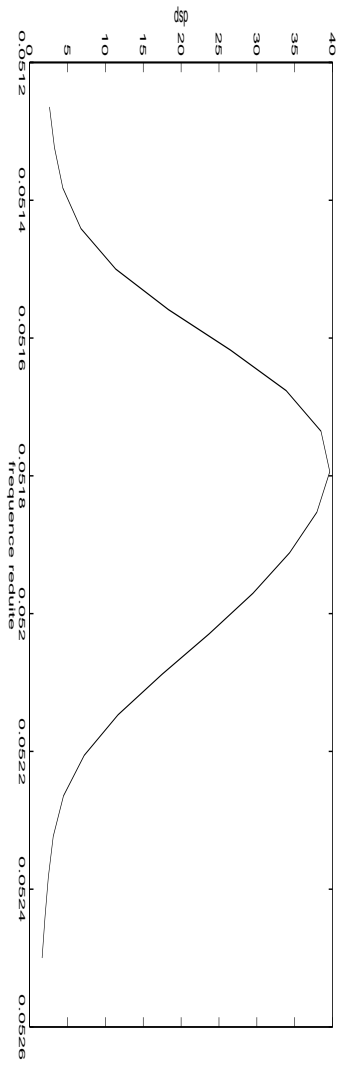


FIG. 7.23: zoom fréquentiel de facteur 2

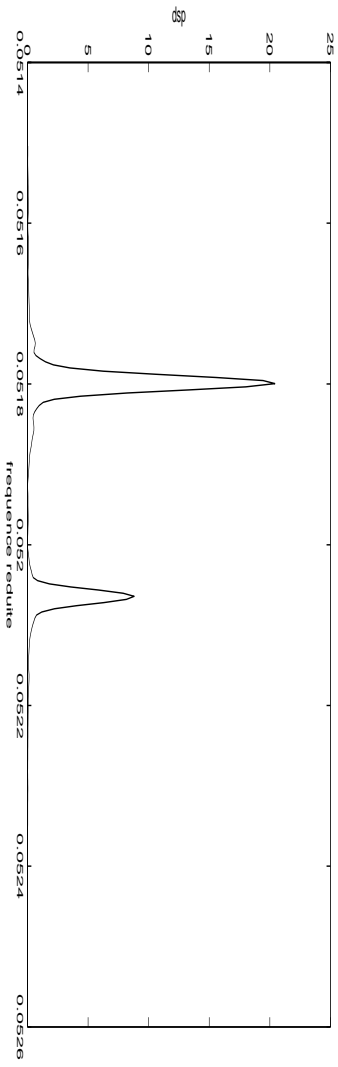


FIG. 7.24: zoom fréquentiel de facteur 32

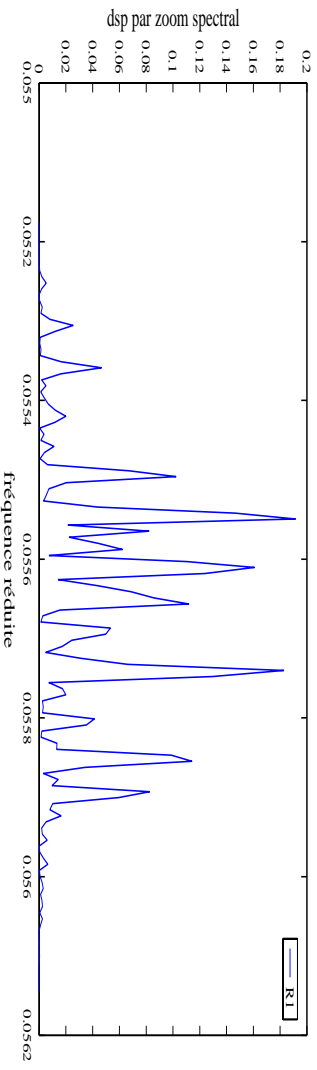


FIG. 7.25: zoom spectral du capteur R1 au canal 229 (résolution 1/4096)

module du spectre décalé. Rappelons simplement que le spectre décalé du signal x , au retard τ et au canal f s'obtient ainsi :

$$\widehat{R_{xx}^T}(f) = \frac{1}{\sum_{l=-N+1}^{N-1} C_{a_N}(l)} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{X^{mL}(f) X^{T+mL}(f)^*}{M\theta}, \quad f \in [0, N-1] \quad (7.1)$$

où C_{a_N} est la fonction de corrélation de l'apodisation, N le nombre d'échantillons pour le calcul de la TFD, L le pas de glissement des blocs temporels (en nombre d'échantillons), θ le coefficient de normalisation des TFD vérifiant $N\theta = 1$ et $X^t(f)$ la TFD de x au bloc temporel commençant à l'indice t . La méthode consiste à tracer, en fonction du retard, le

module du spectre décalé. La contribution du bruit décroît lorsque le retard τ augmente. Ceci fait chuter le module du spectre décalé. Lorsque celui-ci se stabilise le retard τ vérifie $\tau > (N + \tau_b)$ où τ_b est la durée de corrélation du bruit.

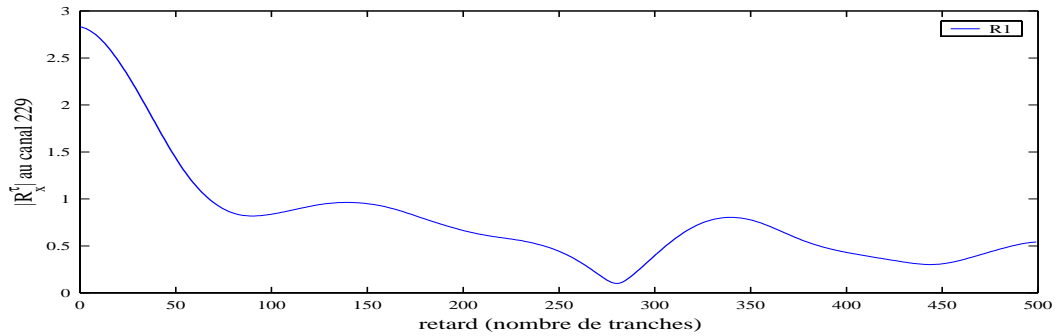


FIG. 7.26: module du spectre décalé du signal R1 au canal 229

Considérons à nouveau le signal R1 filtré par TFD au canal 229. Le module du spectre décalé (figure 7.26) décroît fortement jusqu'à un retard correspondant approximativement à 100 pas de glissement. A partir de 150 pas de glissement, il oscille faiblement autour de 0.5. Les TFD étant effectuées sur une durée équivalente à 128 pas de glissement, la durée de corrélation du bruit du capteur R1 est approximativement de 700 échantillons ($\tau_b \simeq (150 - 128) \cdot 32$). On a donc la confirmation que les bruits ne sont pas temporellement blancs. Les résultats obtenus sur les autres capteurs et dans d'autres canaux sont similaires.

7.3.7 Validation expérimentale du modèle des sources de vibration

Une analyse spectrale fine des capteurs permet de détecter deux types de sources dans les signaux : des raies bande étroite et des raies modulées. Le modèle de raie bande étroite est important car il a servi à calculer un estimateur de filtre de blanchiment spatial. En effet, cet estimateur compense les phases des éléments diagonaux des Matrices Spectrales Décalées des sources, à conditions que les sources soient sinusoïdales. C'est ainsi que l'on obtient à partir de deux Matrices Spectrales Décalées des observations, la matrice spectrale du mélange non bruité (5.9). Pour valider l'estimation de la matrice spectrale du mélange non bruité, il faut donc vérifier que la phase du signal filtré est bien celle attendue et qu'elle ne dépend pas du retard choisi.

Nous avons sélectionné deux capteurs possédant chacun un canal fréquentiel influencé par une source seule (une raie bande étroite puis une raie modulée en fréquence). La matrice spectrale du mélange non bruité de chaque capteur a été estimée à partir de deux Matrices Spectrales Décalées. Puisqu'il s'agit d'un seul capteur, les Matrices Spectrales Décalées se réduisent au spectre décalé du capteur. Un retard τ de 250 pas de glissement a été utilisé pour calculer les spectres décalés. Nous allons voir que pour la raie étroite la phase du signal expérimental respecte bien le modèle proposé. Pour la raie modulée en fréquence, la phase observée n'est pas exactement celle attendue mais l'estimateur est robuste car il compense

relativement bien le déphasage. Les traitements sont réalisés à une résolution grossière (TFD de 4096 échantillons) et analysés à une résolution fine par un zoom fréquentiel de facteur 32.

Cas d'une raie bande étroite

Un zoom fréquentiel de facteur 32 est appliqué au capteur L2, filtré par TFD au canal 213 (fréquence centrale réduite 0.052). Le spectre obtenu est celui d'une raie bande étroite (figure 7.27). Le module du signal filtré par TFD puis normalisé en puissance est présenté à la figure 7.28. On observe un battement autour de 1 qui est dû d'une part à l'écart entre la fréquence centrale du canal et la raie et d'autre part à l'existence d'autres composantes spectrales de faibles amplitudes. La figure 7.29 donne en bleu la phase de la Matrice Spectrale Décalée $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau}(f)$ et en vert la phase de la matrice spectrale du mélange non bruité $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f)$, estimées pour des retards variant de 0 à 350 pas de glissement. De même que pour les sinusoides $\arg(\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau}(f))$ est linéaire en fonction du retard et comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Les sauts de phases sont rapides car deux tranches successives de TFD sont distantes de 32 échantillons. Le terme $\arg(\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f))$, normalement nul, est compris entre -0.02 et 0.02 . Ceci montre que le modèle est vérifié et que l'estimation de la matrice de blanchiment sera robuste vis-à-vis du retard utilisé pour l'estimer.

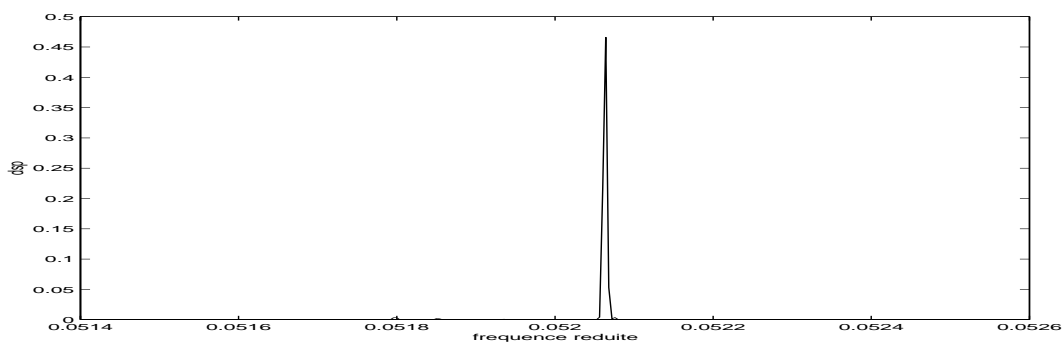


FIG. 7.27: dsp du signal L2 filtré par TFD au canal 213 (zoom fréquentiel)

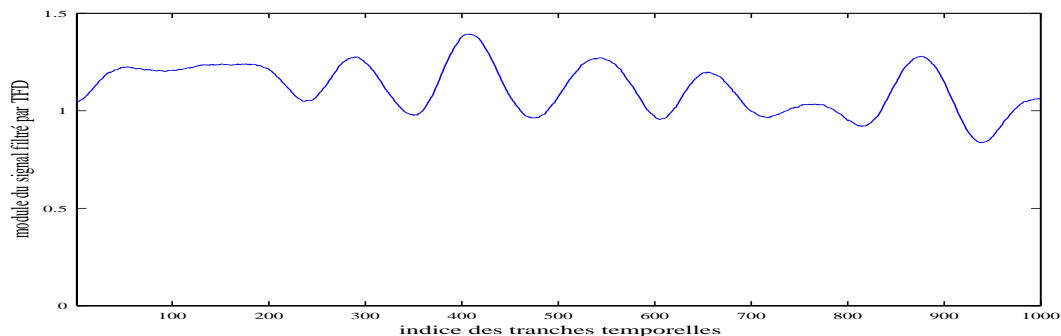


FIG. 7.28: module du signal L2 filtré par TFD au canal 213

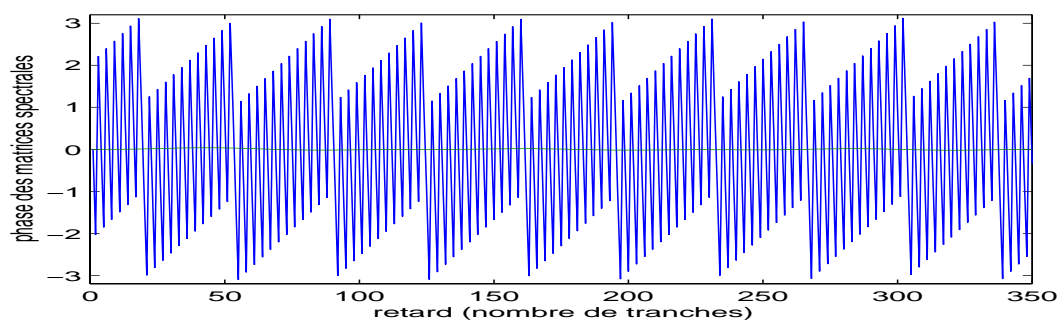


FIG. 7.29: phase des matrices $\widehat{\mathbf{R}}_{rr}^{\tau}(f)$ et $\widehat{\mathbf{R}}_{yy}(f)$ du signal L2 filtré par TFD au canal 213

Cas d'une raie modulée en fréquence

Un zoom fréquentiel de facteur 32 a été appliqué au capteur R1, filtré par TFD au canal 208 (fréquence réduite 0.0505). Le spectre obtenu (figure 7.30) ressemble à celui d'une somme de fréquences pures proches mais il peut aussi être celui d'un signal non stationnaire. Pour lever cette ambiguïté nous allons observer ce signal dans le plan temps-fréquence.

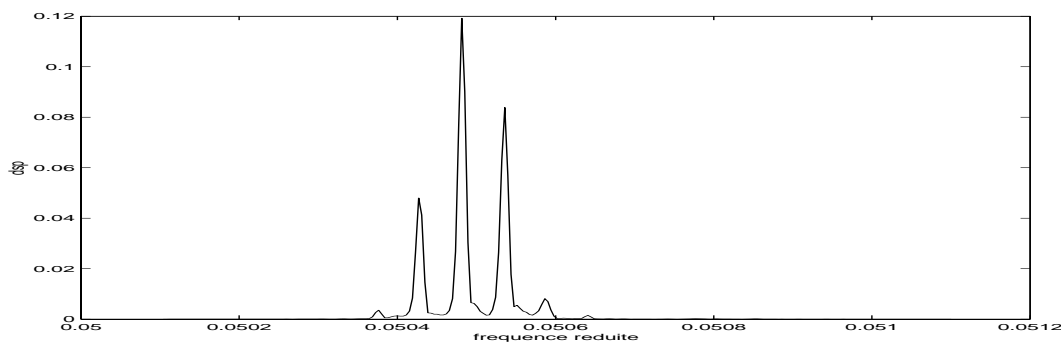


FIG. 7.30: dsp du signal R1 filtré par TFD au canal 208 (zoom fréquentiel)

Nous avons estimé le spectrogramme de ce signal (mêmes paramètres que pour le zoom).

Compte tenu du phénomène d'étalement temporel associé au zoom fréquentiel, le spectrogramme est peu lisible. En effet, chaque point du spectrogramme correspond à une durée d'intégration de $(4096 - 1) \cdot 32 + 4096 = 135136$ échantillons (voir en annexe E.1). Pour faciliter la lecture du spectrogramme nous avons tracé la position du maximum d'amplitude (figure 7.31). Les raies précédemment observées dans la bande $[0.504, 0.507]$ sont en fait l'image d'une modulation de fréquence presque sinusoidale dans un spectre estimé sous hypothèse de stationnarité. Cette modulation de fréquence peut s'expliquer par l'existence d'une variation de charge due à un balourd, entraînant une variation de vitesse du moteur. Pour palier ce problème on utilise souvent des échantillonneurs angulaires.

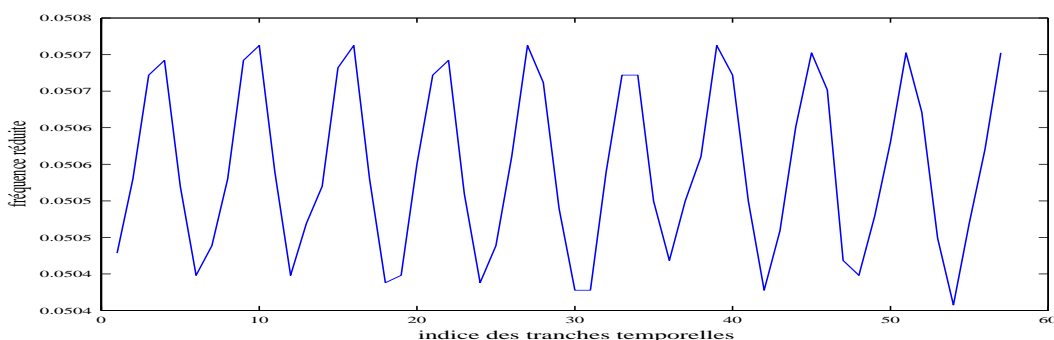


FIG. 7.31: position des maxima dans le spectrogramme du signal R1 filtré par TFD au canal 208

Le module de ce signal filtré par TFD au canal 208 (figure 7.32) oscille car le modèle harmonique n'est pas exact. La figure 7.33 représente en bleu la phase de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}(f)$ et en vert la phase de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f)$, estimées pour des retards variant de 0 à 350 pas de glissement. La phase de la Matrice Spectrale Décalée est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Après compensation, la phase de la matrice spectrale (normalement nulle) est entre -0.3 et 0.3 . Il s'agit ici de compenser une phase moyenne puisque le modèle harmonique n'est pas exact. La compensation est donc moins bonne que dans le cas précédent. Cependant, la phase de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f)$ reste faible par rapport à celle de $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}(f)$, quel que soit le retard considéré entre 0 et 350 pas de glissement. L'estimation de la matrice de blanchiment sera donc robuste vis-à-vis du modèle et du retard utilisé.

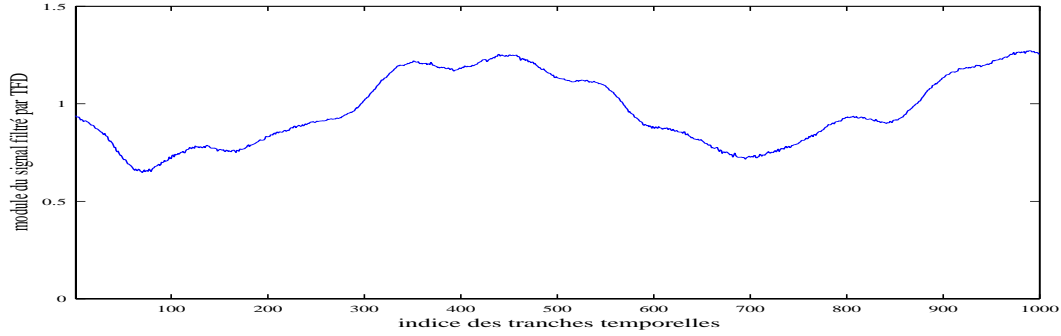
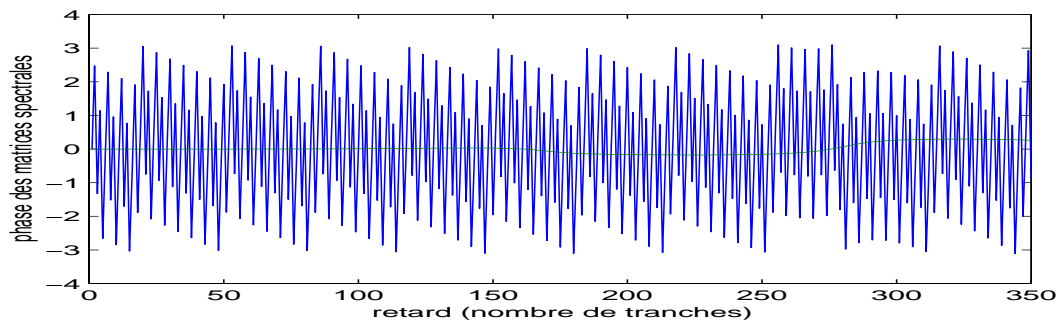


FIG. 7.32: module du signal R1 filtré par TFD au canal 208


 FIG. 7.33: phase des matrices $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^{\tau}(f)$ et $\widehat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f)$ du signal R1 filtré par TFD au canal 208

7.3.8 Conclusion sur les signaux

A l'aide des spectres et des cohérences nous avons montré l'existence de mélange spectraux sur l'ensemble des capteurs sauf B1 et B2. Les bicohérences ont permis de détecter des non-linéarités quadratiques dans les signaux, confortant le choix du séparateur fréquentiel. Une étude spectrale fine par zoom fréquentiel a révélé des raies modulées en fréquence en plus de raies bandes étroites prévues par le modèle. Nous avons vérifié que la méthode de correction des phases par les spectres décalés fonctionne sur ces deux types de sources expérimentales. La durée de corrélation des bruits a été estimée dans un canal sans source. Nous allons maintenant appliquer un algorithme de détection du nombre de sources pour déterminer les canaux où plusieurs sources se mélangent. Nous détaillerons ensuite les étapes de blanchiment et de séparation dans l'un de ces canaux.

7.4 Estimation du nombre de sources et validation des résultats

Les deux nouveaux estimateurs présentés au chapitre 6 utilisent une Matrice Spectrale Décalée. Celle-ci s'obtient par un produit de deux vecteurs de TFD issus de blocs temporels décalés de τ échantillons, notés respectivement $\mathbf{r}^t(f)$ et $\mathbf{r}^{t+\tau}(f)$. Les estimateurs sont

performants lorsque :

- le retard τ est tel que toutes les contributions des bruits dans le vecteur $\mathbf{r}^t(f)$ sont décorréllées de celles dans le vecteur $\mathbf{r}^{t+\tau}(f)$. Cette condition est vérifiée lorsque ($\tau > N + \tau_b$) où τ_b est la durée de corrélation maximale des bruits (τ_b est inconnue a priori) et N le nombre d'échantillons utilisés pour les TFD,
- le retard τ est tel que la contribution de chaque source s_i dans le vecteur $\mathbf{r}^t(f)$ est corréllée à la contribution de la même source dans le vecteur $\mathbf{r}^{t+\tau}(f)$. Cette condition est vérifiée lorsque $\tau < (N + \tau_s)$ où τ_s est la durée de corrélation minimale des sources (τ_s est supposée très supérieure à τ_b),
- la DVS de la Matrice Spectrale Décalée des observations produit deux bases distinctes du sous-espace signal. Cette condition est réalisée lorsque tous les termes diagonaux de la Matrice Spectrale Décalée des sources $\mathbf{R}_{\text{ss}}^\tau(f)$ sont différents. Ces termes sont proportionnels à $[e^{j2\pi(\frac{f}{N}-\nu_1)\tau}, \dots, e^{j2\pi(\frac{f}{N}-\nu_p)\tau}]$ où ν_1, \dots, ν_p sont les fréquences réduites des composantes sinusoïdales présentes au canal f . On remarque que les termes ne dépendent que de l'écart des composantes par rapport à la fréquence centrale f/N . L'influence de τ est donc identique en basse et haute fréquence. Pour que les termes diagonaux soient tous distincts quel que soit τ il faut et il suffit que

$$\forall i, j \in [1, p] \quad \text{tels que} \quad j \neq i, \quad \nexists (Q_i, Q_j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \frac{f}{N} - \nu_i = \frac{Q_j}{Q_i} \left(\frac{f}{N} - \nu_j \right)$$

Ce qui signifie que les écarts des composantes-source à la fréquence centrale doivent être mutuellement incommensurables. Dans la pratique même si cette condition n'est pas vérifiée, il est peu probable que le retard choisi corresponde exactement à l'un des entier Q_i . Nous avons tout de même prévu cette situation : nous utilisons non pas la DVS d'une Matrice Spectrale Décalée mais de deux. En effet, d'une part les éléments diagonaux de $\mathbf{R}_{\text{ss}}^\tau(f)$ sont périodiques de période $T_i = \frac{1}{|f/N - \nu_i|}$, et d'autre part seules les composantes qui tombent dans le lobe principal de l'apodisation sont vues au canal f . De ce fait dans le cas d'une apodisation uniforme on peut considérer que $|f/N - \nu_i|$ est inférieur à $1/N$ et les périodes T_i sont strictement supérieures à N . Si on utilise deux matrices spectrales de retards τ et $(\tau + N)$ alors on aura bien deux bases différentes du sous-espace signal.

Appliquons maintenant les estimateurs du nombre de sources aux signaux expérimentaux. Les TFD sont calculées sur des tranches temporelles de 4096 échantillons, glissant par pas de 32 échantillons. Dans un premier temps nous considérons l'ensemble des capteurs au canal 213 uniquement. Nous estimons le nombre de sources avec nos deux estimateurs (par traitement d'images et par la distance entre projecteurs) tout en faisant varier le retard τ utilisé par ces deux estimateurs. La figure 7.34 présente les résultats obtenus. La courbe en bleu correspond à l'estimation par traitement d'images et celle en vert à l'estimation par les projecteurs orthogonaux. On remarque que pour τ supérieur à 110 pas de glissement, les résultats sont identiques. Ceci concorde avec l'étude sur la durée de corrélation des bruits. Nous avons en effet montré que l'influence du bruit devenait faible pour des retards supérieurs à 100 pas de

glissement. Ceci montre la robustesse des estimateurs.

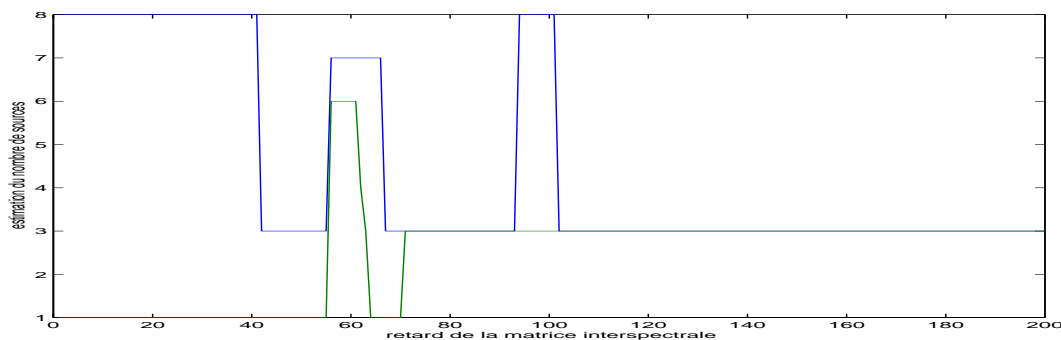


FIG. 7.34: nombre de source estimé au canal 213 en fonction du retard τ

Appliquons maintenant les estimateurs sur l'ensemble des capteurs dans la bande de fréquence $[0.048, 0.054]$ qui correspond aux canaux 200 à 220. La figure 7.35 donne le nombre de sources estimé avec un retard égal à 150 pas de glissement. Les résultats sont identiques pour les deux estimateurs (par traitement d'images et par distance entre sous-espaces).

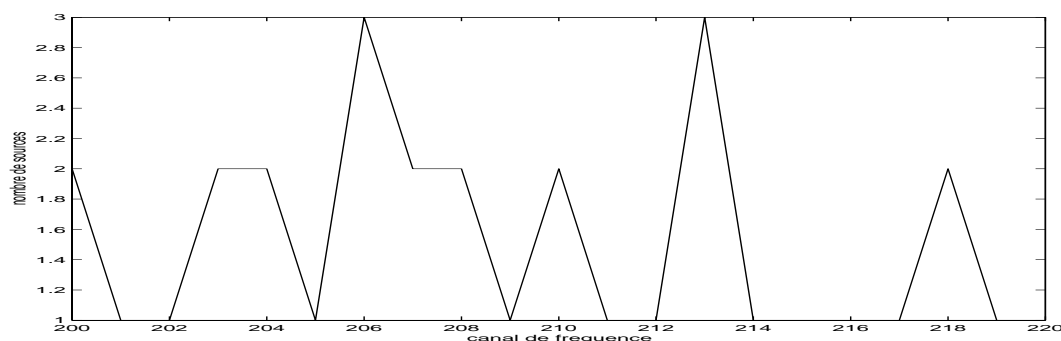


FIG. 7.35: nombre de sources estimé dans les canaux 200 à 220 pour $\tau = 150 \cdot 32$

Les nombres de sources estimés sur les signaux expérimentaux sont fiables. Nous allons maintenant nous focaliser sur un seul canal pour appliquer les techniques de séparation de signaux et présenter les résultats obtenus. Nous choisissons le canal 213 où sont présentes trois sources.

7.5 Séparation des signaux dans un canal

7.5.1 Présentation des 4 cas d'étude

Lors de l'étude précédente nous avons détecté trois sources au canal 213 (fréquence centrale réduite 0.052). Une analyse spectrale haute-résolution de l'ensemble des capteurs nous permet d'affirmer qu'il contient, sur différents jeux de capteurs, deux raies pures et une raie modulée en fréquence. Ces sources sont mélangées sur certains capteurs. La figure 7.36 présente les dsp haute-résolution des 14 capteurs au canal 213. La matrice de cohérence (figure 7.37) confirme

l'existence des mélanges (valeurs fortes en dehors de la diagonale). On remarque que pour ce canal les capteurs de l'ensemble 1 sont fortement cohérents entre eux, sauf B1 et M1. Ils sont cohérents avec les capteurs posés sur la structure (sauf B1) et peu cohérents avec les capteurs de l'ensemble 2 (sauf M1).

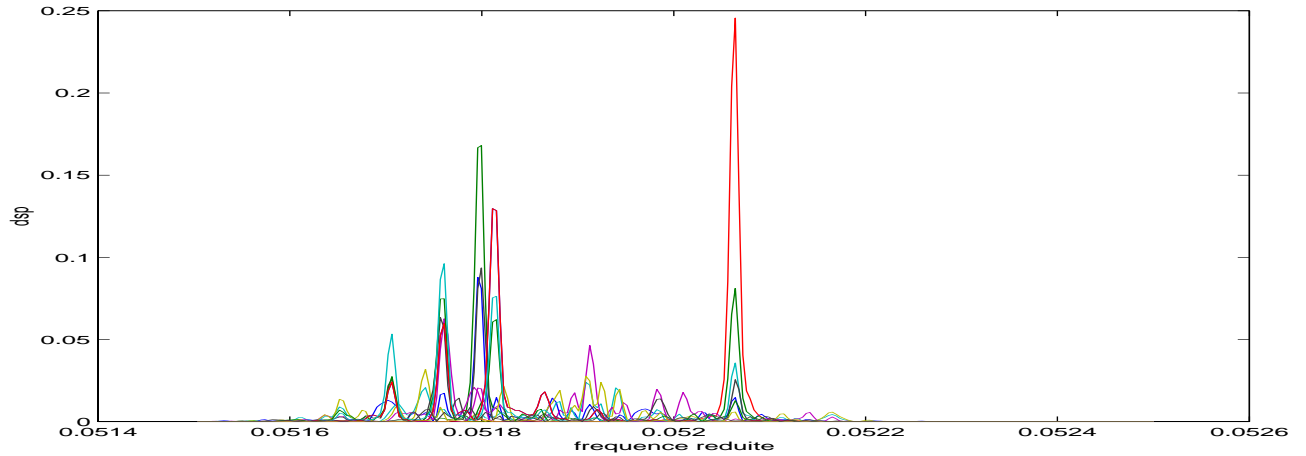


FIG. 7.36: dsp des 14 capteurs au canal 213 (zoom fréquentiel)

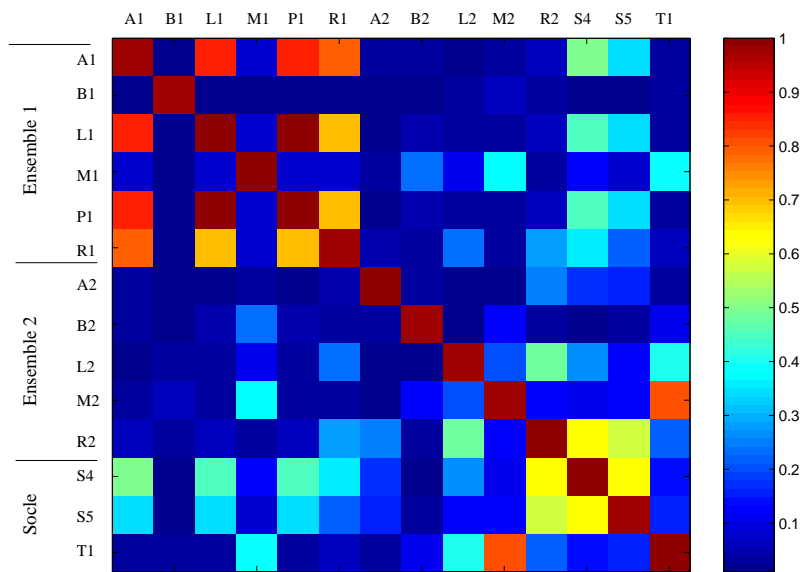


FIG. 7.37: cohérence entre les 14 capteurs au canal 213

De manière à montrer le comportement de la méthode et de la valider sur des raies pures issues d'une expérimentation réelle et des sources modulées, nous avons sélectionné quatre cas parmi les capteurs disponibles. Les spectres sont visualisés ci-dessous.

- cas 1 : trois capteurs faiblement bruités contenant les deux raies pures (capteurs S5, R2 et L2). La figure 7.38 présente le zoom fréquentiel de ces capteurs.

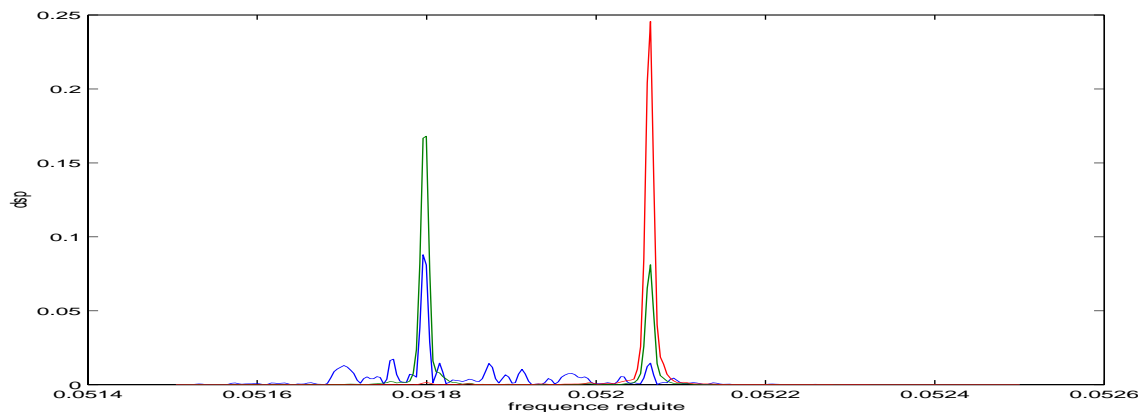


FIG. 7.38: cas 1 : dsp des 3 capteurs au canal 213 (zoom fréquentiel)

- cas 2 : six capteurs (dont trois bruités) contenant les deux raies pures (capteurs S5, R2, L2, T1, M1 et M2). La figure 7.39 présente le zoom fréquentiel de ces capteurs.

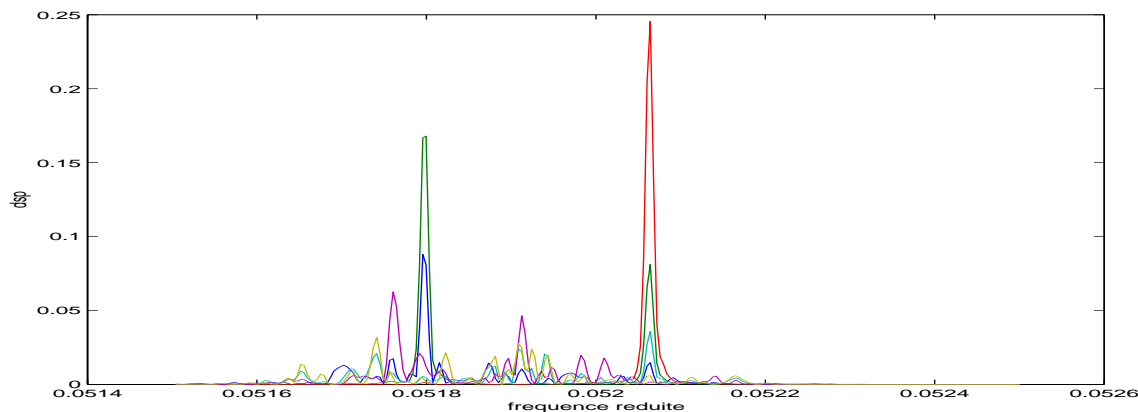


FIG. 7.39: cas 2 : dsp des 6 capteurs au canal 213 (zoom fréquentiel)

- cas 3 : 12 capteurs contenant les deux raies pures, une raie modulée en fréquence et du bruit. Les capteurs électriques (B1 et B2) ont été éliminés parce que incohérents avec les autres capteurs. Ce cas permet de tester la robustesse des méthodes de blanchiment et séparation vis-à-vis de sources non sinusoïdales et vis-à-vis de bruit additif. Le zoom fréquentiel de ces capteurs n'est pas présenté à nouveau car il correspond à la figure 7.36 sans les capteurs B1 et B2.
- cas 4 : 14 capteurs contenant les deux raies, une raie modulée en fréquence et du bruit. Etant donné que les capteurs B1 et B2 sont incohérents avec les autres capteurs, l'hypothèse d'inversibilité du mélange est mise en défaut. Ce cas permet de tester la robustesse des méthodes vis-à-vis de cette hypothèse. Le zoom fréquentiel des 14 capteurs est donné à la figure 7.36.

Pour ces quatre cas, nous étudierons le blanchiment (par l'ACP et la méthode par décalage), la robustesse de l'estimation de la matrice spectrale du mélange non bruité puis la

séparation par JADE et la méthode à décalages.

7.5.2 Blanchiment spatial

Estimation du filtre blanchisseur - robustesse vis-à-vis du retard τ

Rappelons que pour des sources sinusoïdales, la matrice spectrale du mélange non bruité peut être estimée à l'aide d'une Matrice Spectrale Décalée de retard τ et d'une autre de retard -2τ . Il suffit pour cela que le retard τ soit supérieur à $(N + \tau_b)$ où τ_b est le plus grand support de corrélation des bruits et N la taille des tranches de TFD. Pour tous les retards τ vérifiant cette condition nous devons obtenir approximativement la même matrice spectrale du mélange non bruité. Nous allons le vérifier dans les deux premiers cas en représentant les valeurs propres de la Matrice Spectrale Décalée de retard (2τ) en fonction de τ , auxquelles sont superposées les valeurs propres de la matrice spectrale du mélange non bruité. Les TFD sont effectuées sur des tranches de 4096 échantillons, glissant par pas de 32 échantillons. Le retard τ est exprimé en nombre de pas de glissement. D'après l'étude du support de corrélation des bruits, le retard $N + \tau_b$ est à peu près égal à 150 pas de glissement.

Dans le premier cas (deux raies peu bruitées), les deux premières valeurs propres de la Matrice Spectrale Décalée (en rouge et vert) sont périodiques (figure 7.40). Ceci est normal puisque la présence de deux composantes fréquentielles dans le même canal provoque des battements sur l'amplitude des spectres décalés. Les valeurs propres de la matrice spectrale du mélange non bruité (en jaune et violet pour les deux premières) sont quant à elles presque constantes après environ 100 pas de glissement. Nous observons aussi que les fluctuations des termes de la Matrice Spectrale Décalée ont été correctement compensées.

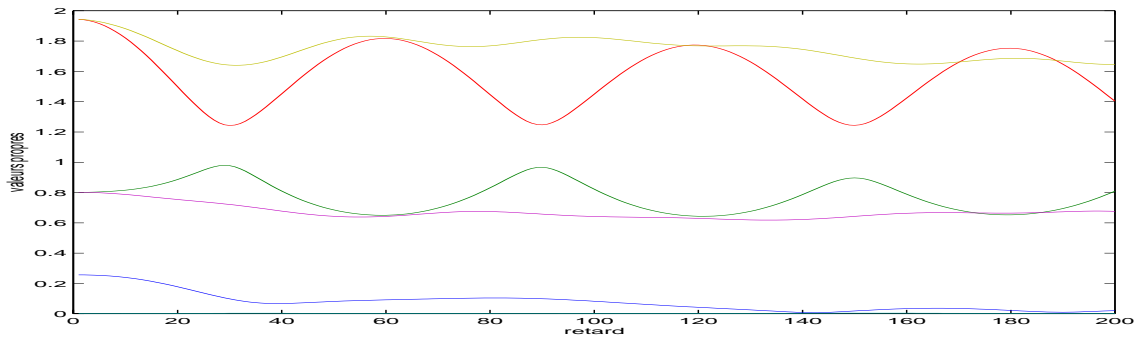


FIG. 7.40: cas 1 : valeurs propres de la matrice spectrale décalée

Dans le deuxième cas (figure 7.41), comme précédemment les deux premières valeurs propres de la Matrice Spectrale Décalée (en jaune et violet en bas) sont périodiques et les valeurs propres de la matrice spectrale du mélange non bruité (en violet en haut et bleu ciel en haut) sont à peu près constantes au delà de 100 retards.

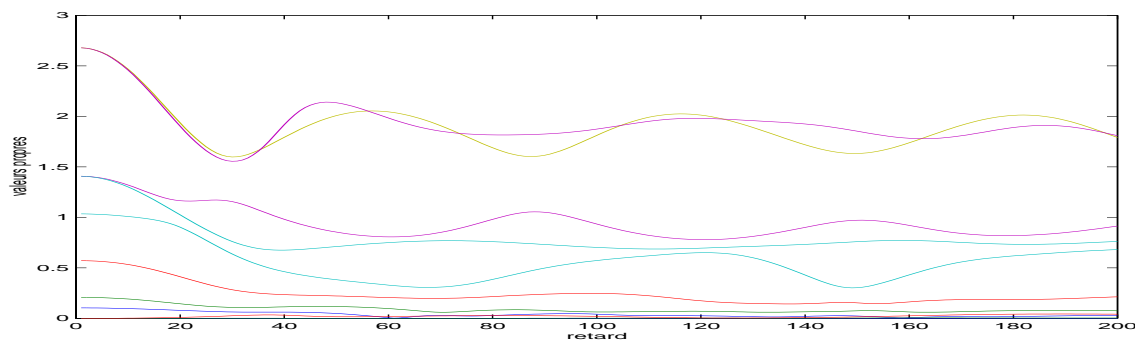


FIG. 7.41: cas 2 : valeurs propres de la matrice spectrale décalée

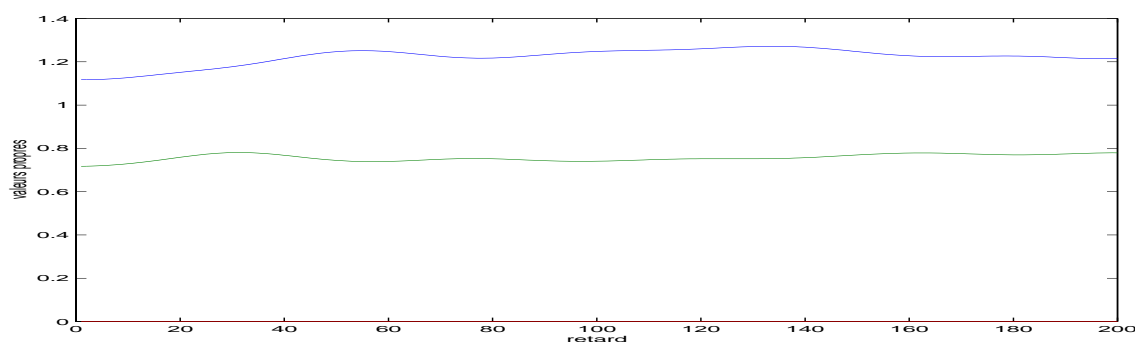


FIG. 7.42: cas 1 : valeurs propres de la matrice de blanchiment

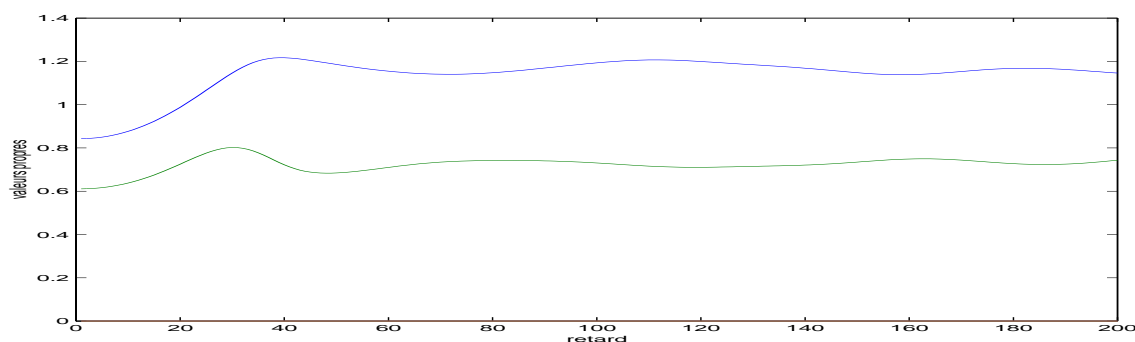


FIG. 7.43: cas 2 : valeurs propres de la matrice de blanchiment

Ces résultats prouvent que les raies étroites respectent le modèle sinusoïdal et que la matrice spectrale du mélange non bruité est bien estimée. Ceci est confirmé par la stabilité des valeurs propres de la matrice de blanchiment (figure 7.42 et 7.43) pour des retards supérieurs à 100 pas de glissement.

Dans le cas 3 (figure 7.44) la première valeur propre de la Matrice Spectrale Décalée (en violet) a des fluctuations périodiques dues aux deux raies pures comme dans le cas 1 mais aussi une périodicité plus grande, de l'ordre de 300 pas de glissement, due à la raie modulée en fréquence. De plus les valeurs propres sont instables car les deux capteurs de type électrique

A1 et A2 ont des puissances très faibles. Le système de mélange est alors mal conditionné. Cette hypothèse est confortée en calculant le conditionnement de la matrice spectrale et en observant les mêmes valeurs propres en ayant enlevé ces deux capteurs du système (figure 7.45). L'allure des courbes est la même, mais l'instabilité a disparu. L'instabilité peut aussi être compensée en moyennant les matrices de blanchiment estimées sur plusieurs retards. Les courbes sont alors lissées.

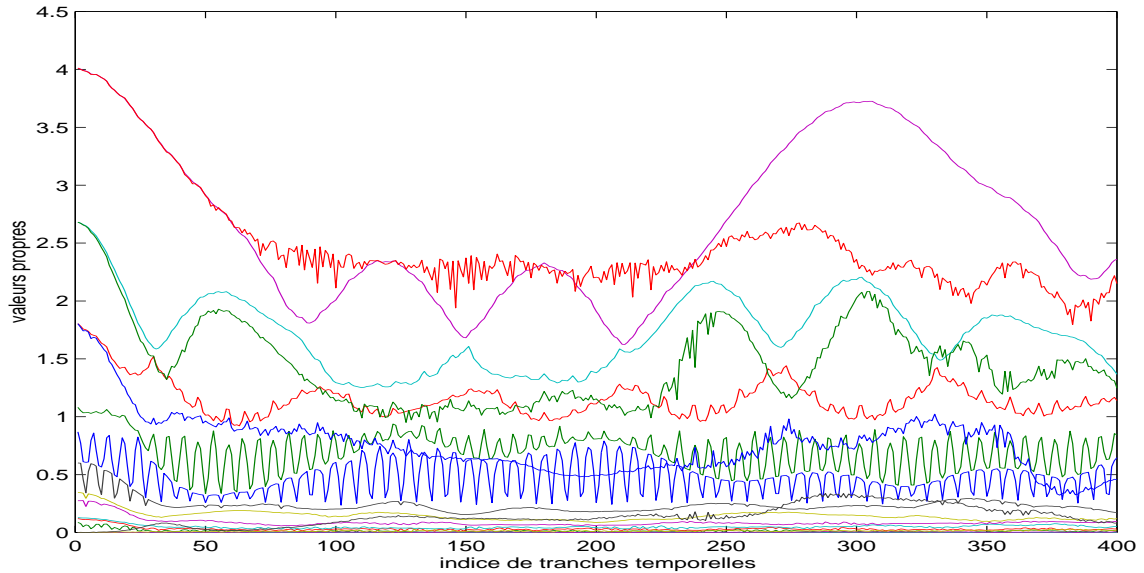


FIG. 7.44: cas 3 : valeurs propres de la matrice spectrale décalée

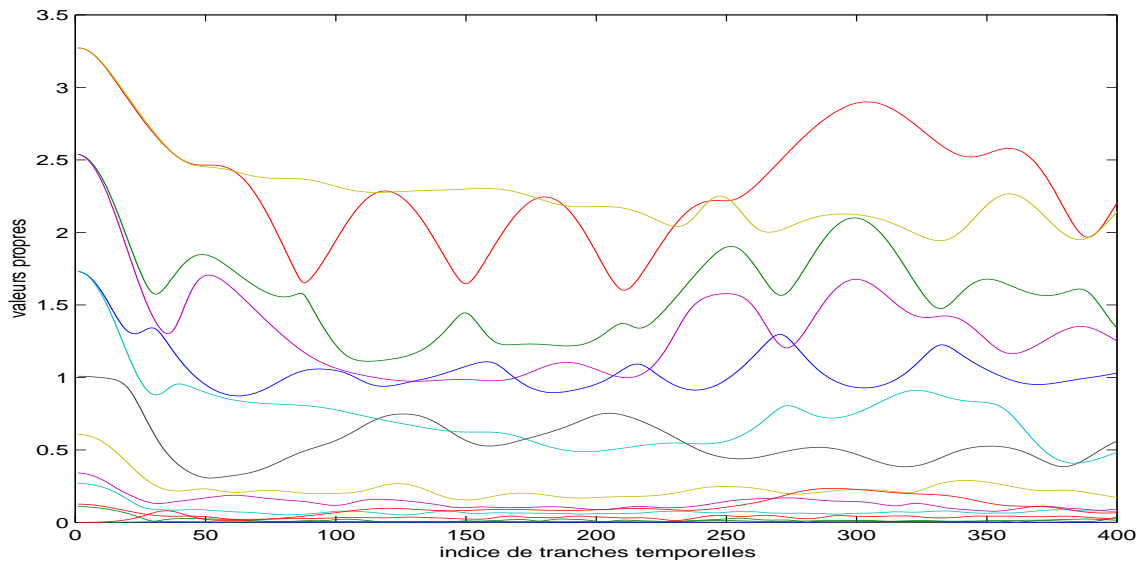


FIG. 7.45: cas 3 en retirant A1 et A2 : valeurs propres de la matrice spectrale décalée

Dans le cas 4 non représenté ici, l'instabilité des valeurs propres est amplifiée par la

présence de deux capteurs décorrélés des autres. Le mélange est nettement non inversible.

La robustesse vis-à-vis du retard τ peut aussi se mesurer sur les signaux séparés. Les résultats de séparation ne doivent pas trop dépendre du retard τ utilisé pour estimer la matrice de blanchiment. Pour le vérifier, nous avons calculé le kurtosis des signaux séparés pour différents retards τ . La dernière étape a été effectuée par l'algorithme JADE en diagonalisant des cumulants d'ordre 4 des observations blanchies. Nous avons mesuré les kurtosis des deux sources estimées dans le cas 2 (figure 7.46) puis des trois sources estimées dans le cas 3 (figure 7.47). Dans le cas 3, la matrice de blanchiment a été moyennée sur 10 retards pour éviter les instabilités. On retrouve dans les deux cas les mêmes kurtosis pour les raies pures, à peu près constant autour de -0.9 et -0.7 pour un retard supérieur à 100. La valeur théorique du kurtosis spectral d'une sinusoïde est égale à -1 . Dans le cas 3, le kurtosis spectral de la troisième source estimée fluctue un peu plus en fonction du retard car cette source ne vérifie pas exactement le modèle théorique de signal sinusoïdal.

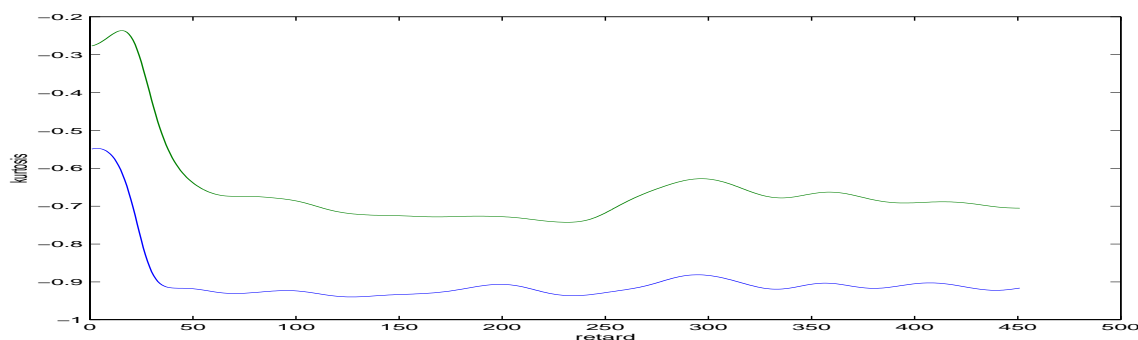


FIG. 7.46: cas 2 : kurtosis spectral des deux sources estimées

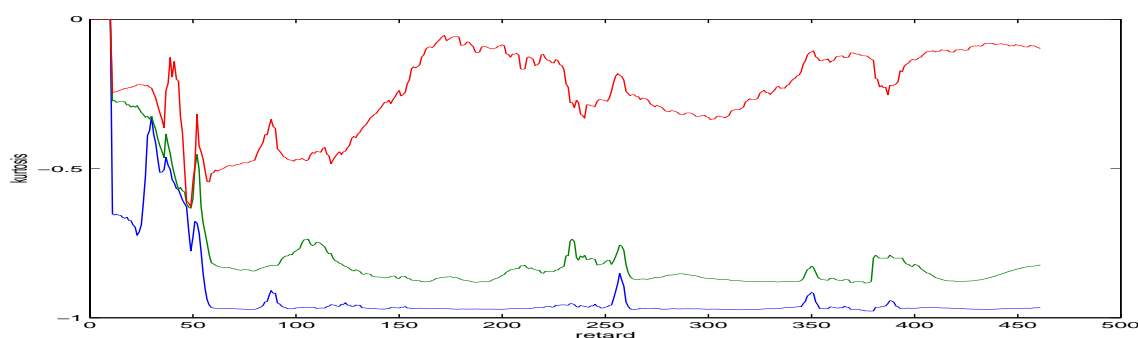


FIG. 7.47: cas 3 : kurtosis spectral des trois sources estimées

Blanchiment spatial d'un mélange bruité (cas 2)

Le blanchiment spatial donne des résultats similaires dans les cas 1 et 2 bien que dans le cas 2 les capteurs observent un mélange bruité. Nous visualisons le zoom fréquentiel des sorties du filtre blanchisseur dans le cas 2. Les résultats de l'ACP sont donnés à la figure 7.48

et ceux de la méthode à décalages (retard égal à 150 pas de glissement) sont donnés à la figure 7.49. L'ACP élimine moins bien le bruit car la condition de bruits spatialement blancs n'est pas vérifiée. Dans les deux cas il reste encore un mélange (en théorie orthogonal) des deux raies.

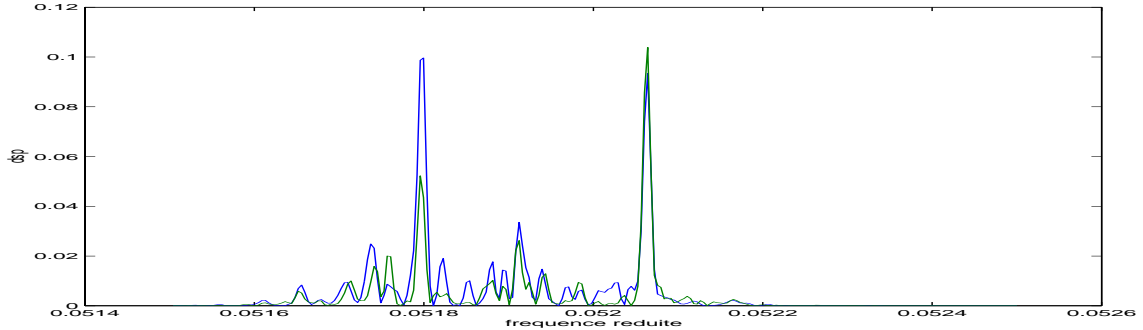


FIG. 7.48: cas 2 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par ACP

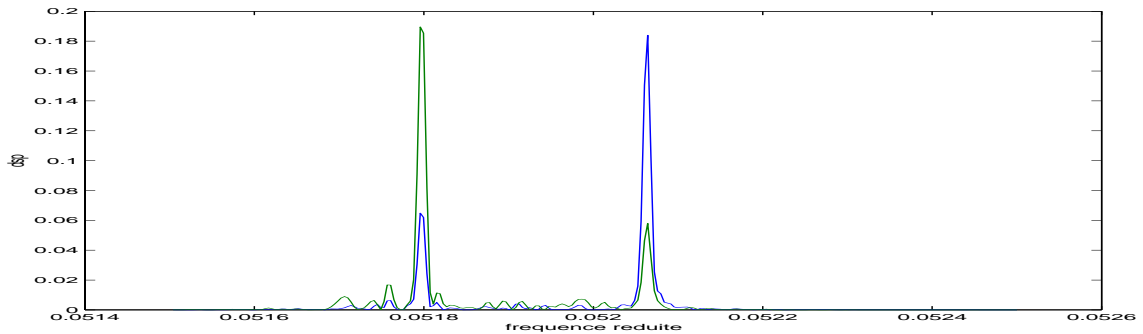


FIG. 7.49: cas 2 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par décalage

Blanchiment spatial de mélanges bruités mal conditionnés (cas 3 et 4)

Nous effectuons maintenant le blanchiment dans les cas 3 et 4 où trois sources sont présentes. L'objectif est de tester la robustesse des méthodes vis-à-vis de l'hypothèse d'inversibilité du mélange (presque respectée dans le cas 3, non respectée dans le cas 4), en plus de l'existence de bruits non spatialement blancs et d'une source non conforme au modèle (raie modulée en fréquence). Nous visualisons le zoom fréquentiel des trois sorties du filtre blanchisseur. Les résultats obtenus par l'ACP sont donnés figure 7.50 et ceux obtenus par la méthode à décalages figure 7.51. Pour cette seconde méthode, nous avons choisi un retard égal à 300 pas de glissement pour compenser au mieux le terme de phase de la troisième source. Dans les deux cas, la méthode à décalages élimine mieux le bruit que l'ACP. Ceci est normal car nous ne sommes pas dans les conditions de bruits spatialement blancs requises par l'ACP. Les deux méthodes sont robustes vis-à-vis de l'inversibilité du mélange car les résultats sont quasiment identiques pour les cas 3 ou 4.

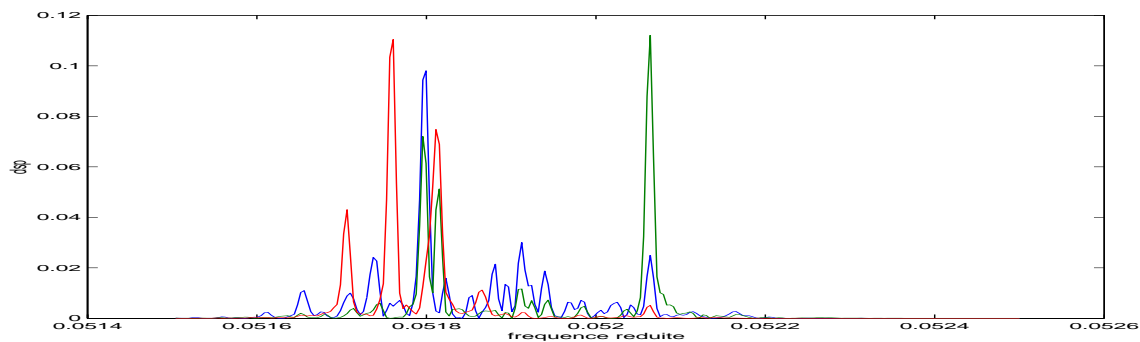


FIG. 7.50: cas 3 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par ACP

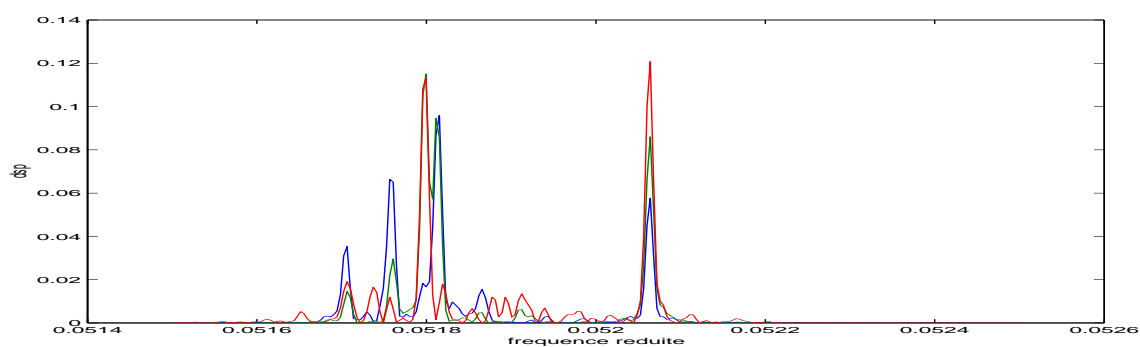


FIG. 7.51: cas 3 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par méthode à décalages

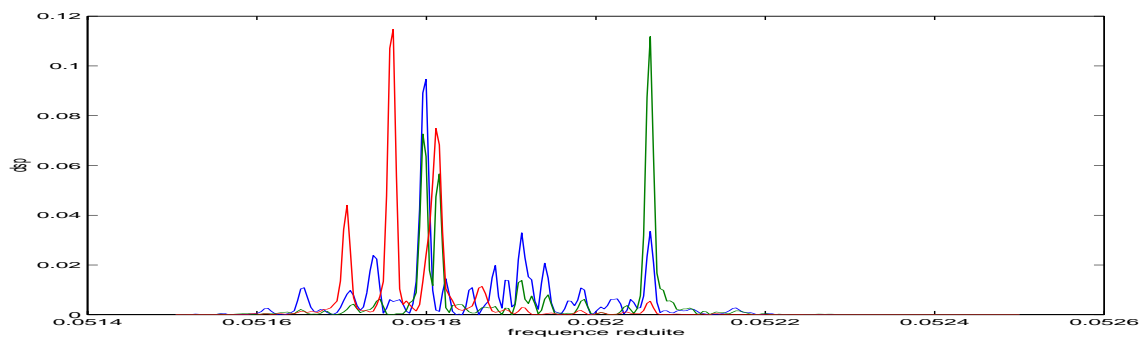


FIG. 7.52: cas 4 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par ACP

7.5.3 Séparation

Dans cette partie, nous réalisons la séparation totale par trois méthodes : le blanchiment par l'ACP suivie de l'algorithme JADE (méthode à l'ordre 4), le blanchiment par décalage suivi de JADE (appelée méthode 1) et la séparation totale effectuée par décalage (appelée méthode 2).

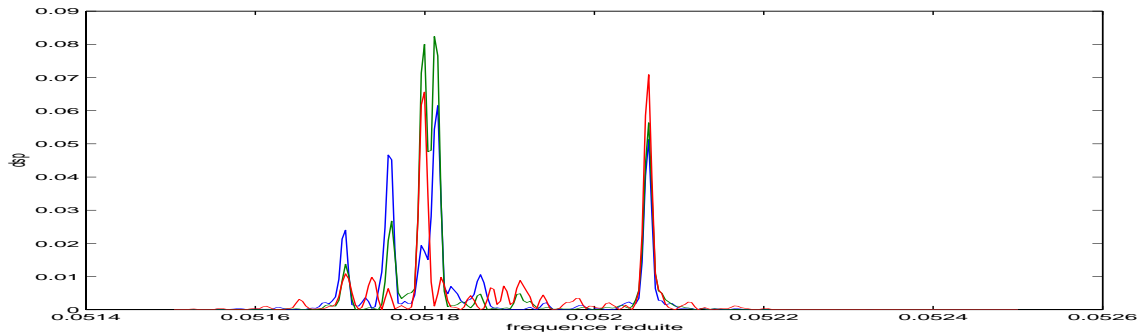


FIG. 7.53: cas 4 : zoom fréquentiel des signaux blanchis par méthode à décalages

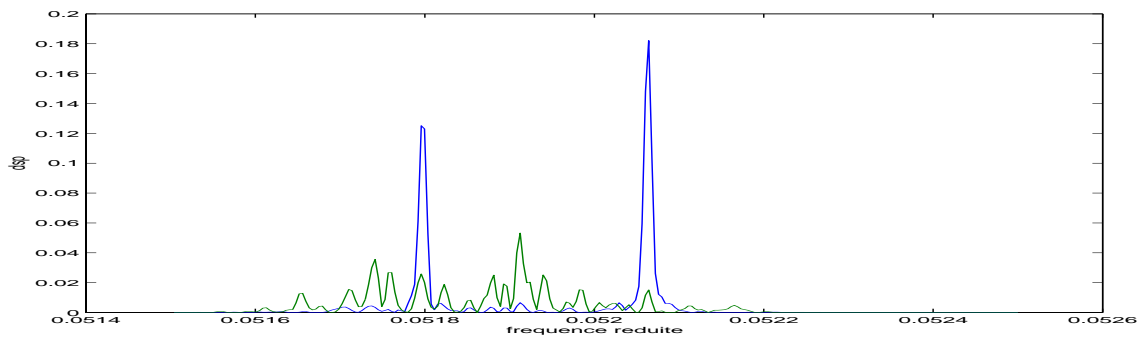


FIG. 7.54: cas 2 : zoom fréquentiel des signaux séparés par l'ACP suivie de JADE

Séparation d'un mélange bruité (cas 2)

La figure 7.54 présente le zoom fréquentiel des sources estimées après l'ACP suivie de JADE. Le mauvais blanchiment par l'ACP ne permet pas d'effectuer correctement la dernière étape de séparation. Les deux raies sont alors estimées sur la même sortie. Les figures 7.55 et 7.56 présente le zoom fréquentiel des sources estimées respectivement par les méthodes 1 et 2. Les résultats de séparation sont bien meilleurs, ce qui prouve l'importance du blanchiment. La méthode 2, à décalages, semble avoir mieux débruité les sources.

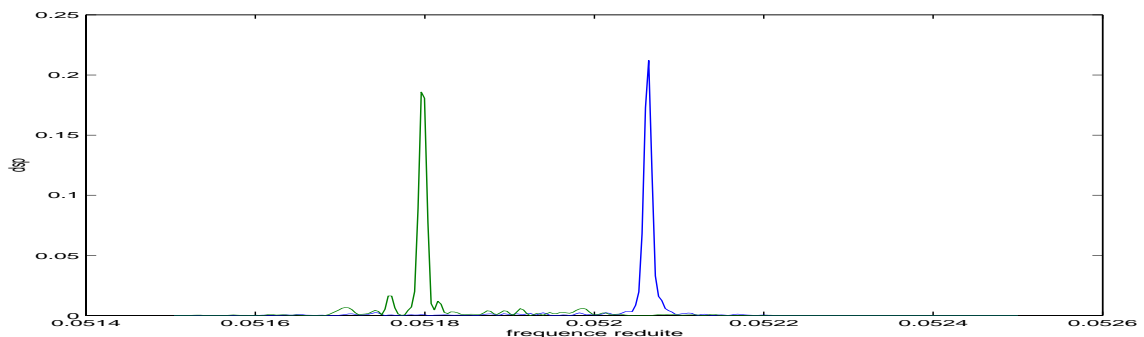


FIG. 7.55: cas 2 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 1

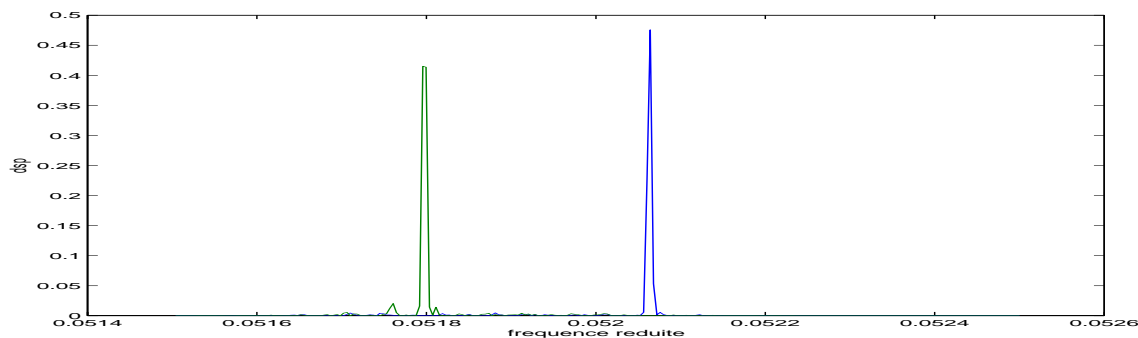


FIG. 7.56: cas 2 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 2

Séparation de mélanges bruités mal conditionnés (cas 3 et 4)

Nous effectuons maintenant la séparation dans les cas 3 et 4 où trois sources sont présentes. L'objectif est de tester la robustesse des méthodes vis-à-vis de l'hypothèse d'inversibilité du mélange (presque respectée dans le cas 3, non respectée dans le cas 4), en plus de l'existence de bruits non spatialement blancs et d'une source non conforme au modèle (raie modulée en fréquence). Nous visualisons le zoom fréquentiel des trois sorties du séparateur.

Les résultats obtenus par l'ACP suivie de JADE sont donnés à la figure 7.57 pour le cas 3 et à la figure 7.58 pour le cas 4. Comme dans le paragraphe précédent, le mauvais blanchiment par l'ACP ne permet pas d'effectuer correctement la dernière étape de séparation. Il reste manifestement la sinusoïde de fréquence réduite 0.05205 sur les trois sources estimées.

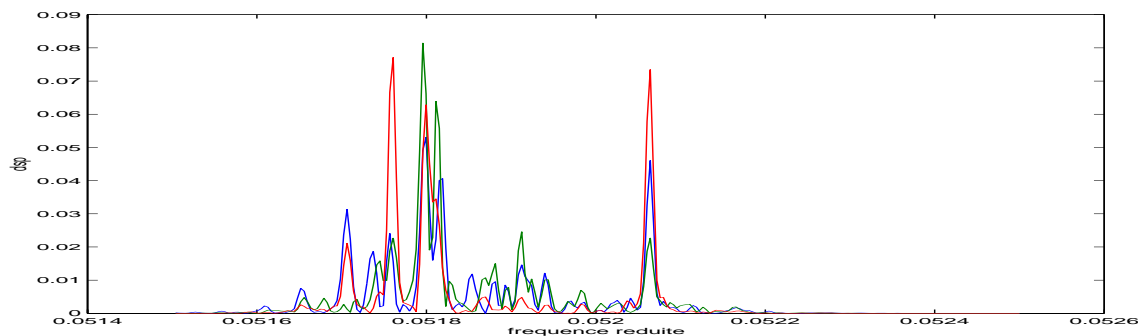


FIG. 7.57: cas 3 : zoom fréquentiel des signaux séparés par l'ACP suivie de JADE

Pour les méthodes 1 et 2 où le blanchiment est effectué par la méthode à décalages (retard égal à 300 pas de glissement), les résultats de séparation sont très proches (figures 7.59, 7.60, 7.61 et 7.62). On sépare trois sources dont deux sont des fréquences pures et la troisième est une raie modulée en fréquence. Les deux méthodes sont robustes vis-à-vis de l'inversibilité du mélange car les résultats sont quasiment identiques dans les cas 3 et 4.

En conclusion, nous pouvons maintenant donner une estimation précise de la fréquence des deux raies pures grâce à l'analyse spectrale haute-résolution : 0.0518 et 0.05205 en fréquence réduite. Dans la suite nous nommerons ces fréquences respectivement F1 et F2. Au paragraphe

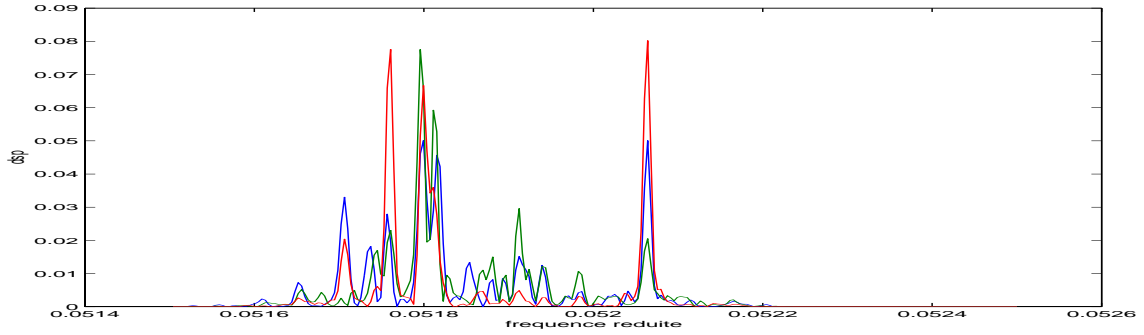


FIG. 7.58: cas 4 : zoom fréquentiel des signaux séparés par l'ACP suivie de JADE

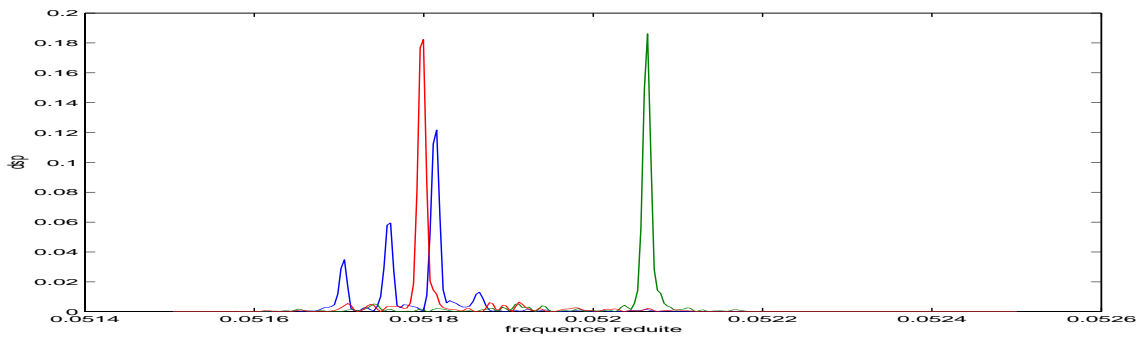


FIG. 7.59: cas 3 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 1

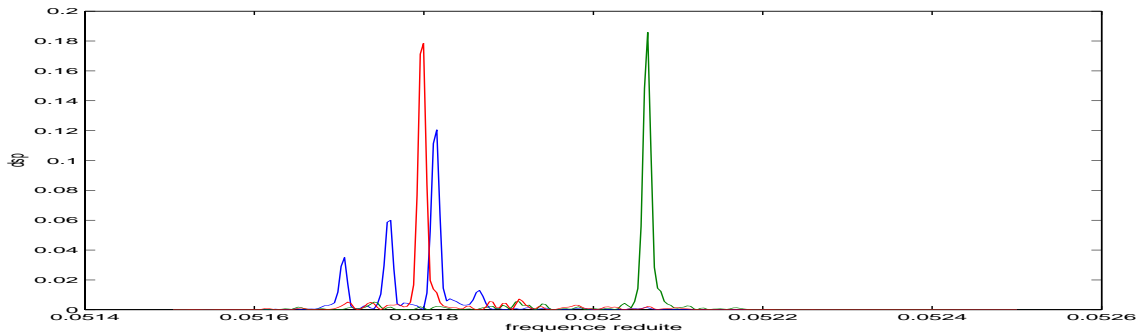


FIG. 7.60: cas 4 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 1

suisant, nous calculons à partir de ces sources estimées de puissance unité, la contribution de chaque source sur chaque capteur pour déterminer l'origine de chacune des sources.

Interprétation de la séparation

Nous avons reconstruit sur chacun des 14 capteurs la contribution en densité spectrale de puissance des trois sources séparées avec notre méthode à décalages (méthode 2). Nommons \hat{s}_i^t l'estimée et r_k^t l'observation. Supposons qu'au canal fréquentiel traité on a :

$$r_k^t = H_{ki} \cdot s_i^t + H_{kl} \cdot s_l^t + \varepsilon \cdot b^t$$

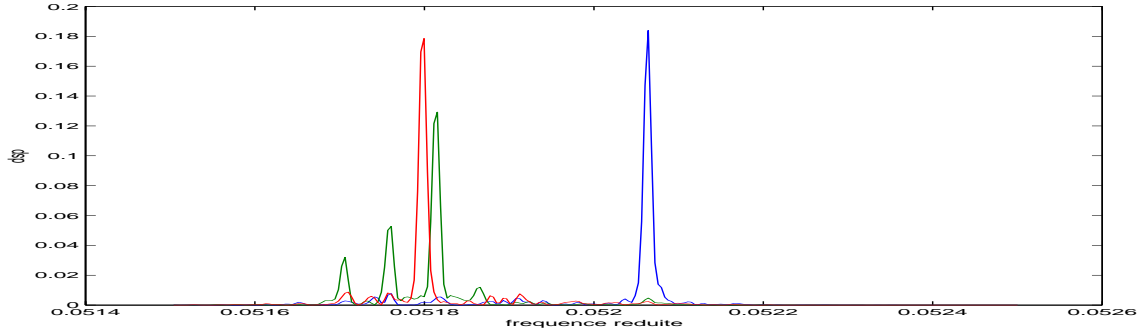


FIG. 7.61: cas 3 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 2

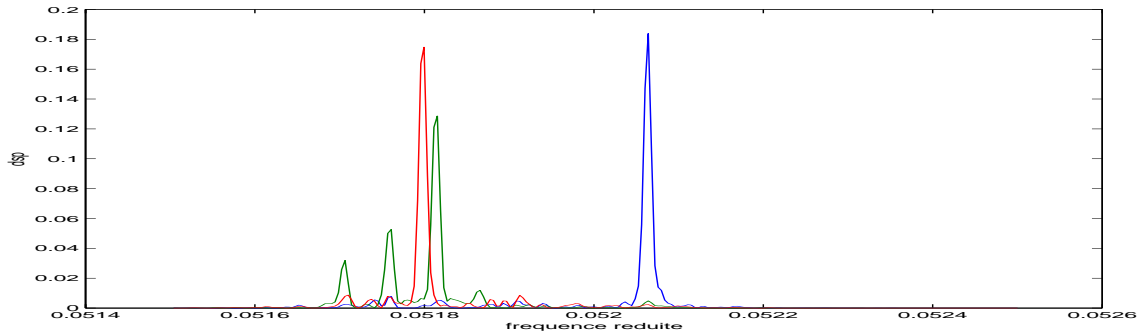


FIG. 7.62: cas 4 : zoom fréquentiel des signaux séparés par la méthode 2

et

$$\widehat{s}_i^t = s_i^t + \alpha \cdot b^t$$

avec

s_i^t, s_l^t et b^t : signaux normalisés en puissance
 $H_{ki}, H_{kl}, \varepsilon$ et α : coefficients complexes
 ε et α très petits en module devant H_{ki} et H_{kl}

Compte tenu de l'indépendance entre les signaux, l'intercorrélacion entre l'estimée et l'observation s'écrit :

$$C_{\widehat{s}_i r_k}(\tau) = E \left\{ \widehat{s}_i^t \cdot (r_k^{t+\tau})^* \right\} = H_{ki}^* \cdot C_{s_i s_i}(\tau) + \alpha \cdot \varepsilon^* \cdot C_{bb}(\tau)$$

Cette fonction de la variable τ est ici sous-échantillonnée d'un facteur 32. De ce fait en calculant la TFD de l'intercorrélacion on obtient le zoom fréquentiel de la contribution en densité spectrale de l'estimée i dans l'observation k . En négligeant l'influence du bruit cette contribution s'écrit :

$$R_{\widehat{s}_i r_k}(\nu) = H_{ki}^* \cdot R_{s_i s_i}(\nu)$$

Dans les figures ci-après nous représentons sur chaque capteur k le module de la contribution en densité spectrale des trois sources estimées $|R_{\hat{s}_i r_k}(\nu)|$ auxquelles nous superposons (en bleu cyan) le zoom fréquentiel du mélange observé sur ce capteur. La raie modulée en fréquence est tracée en bleu marine, la raie de fréquence F1 en vert et celle de fréquence F2 en rouge.

Ensemble 1

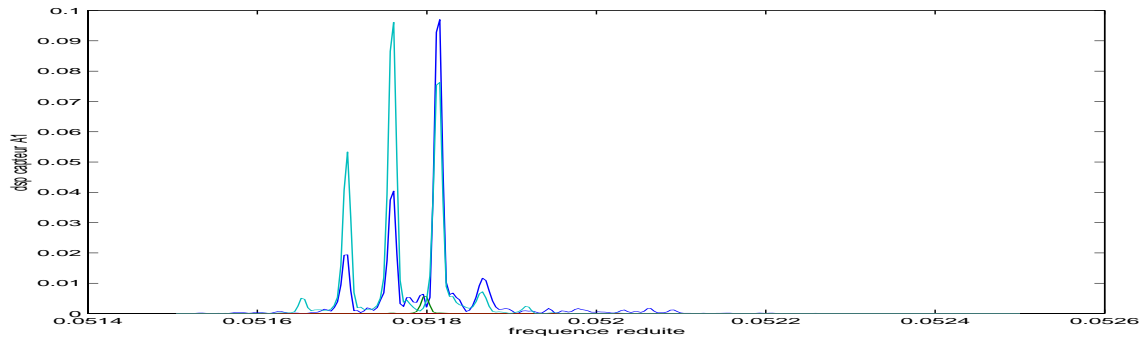


FIG. 7.63: capteur A1

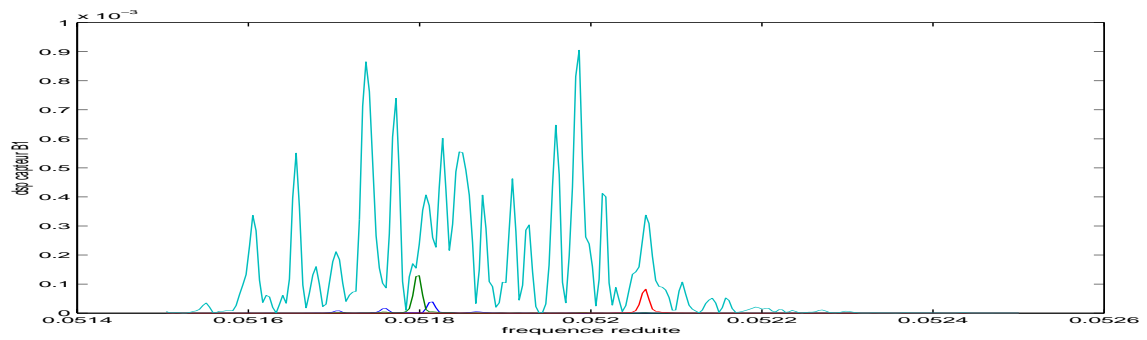


FIG. 7.64: capteur B1

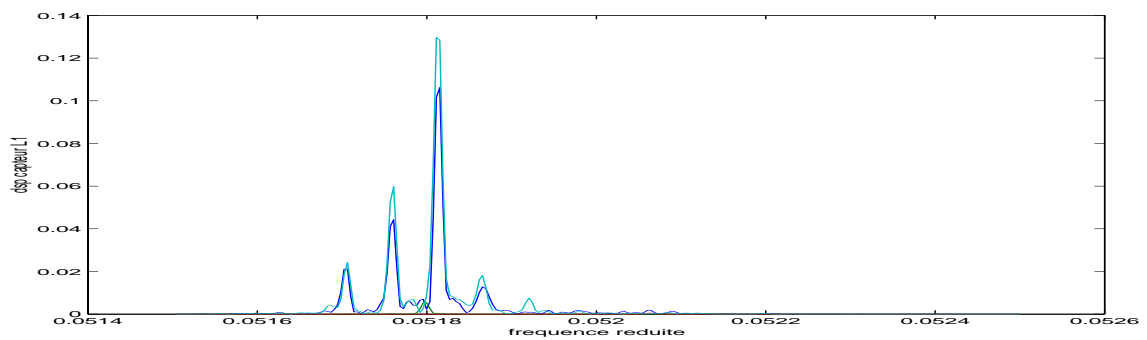


FIG. 7.65: capteur L1

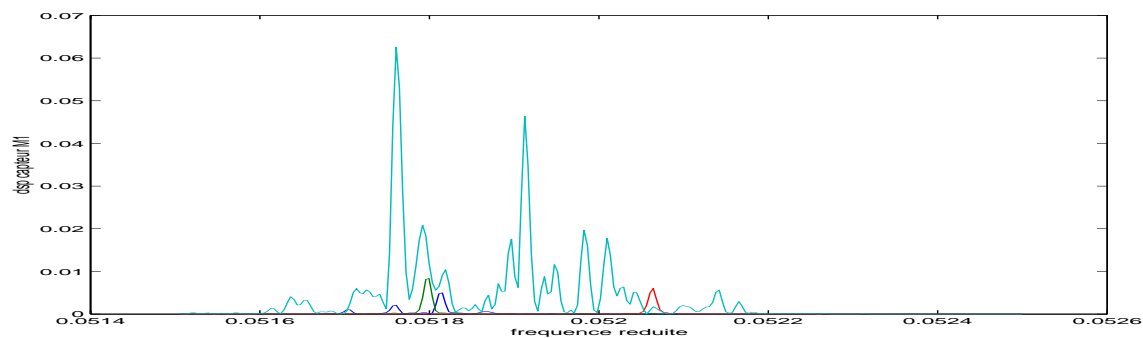


FIG. 7.66: capteur M1

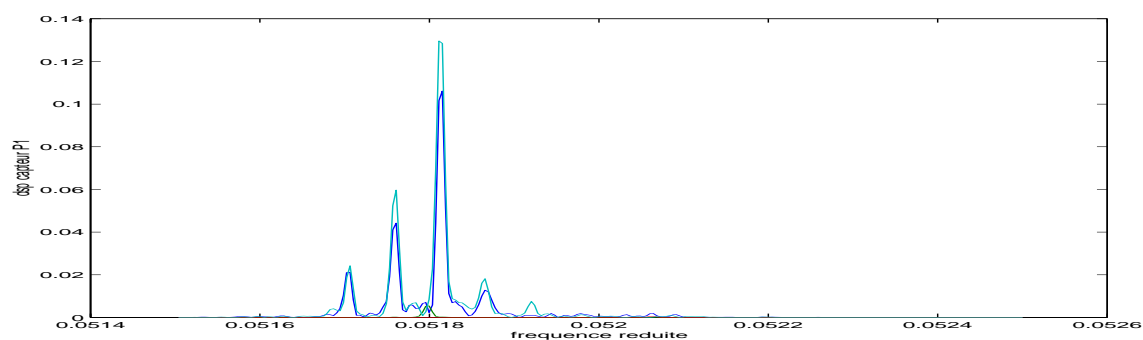


FIG. 7.67: capteur P1

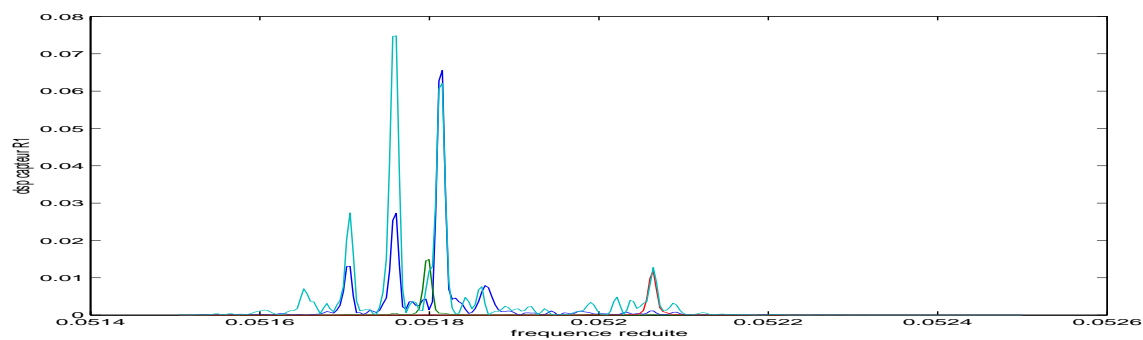


FIG. 7.68: capteur R1

Ensemble 2

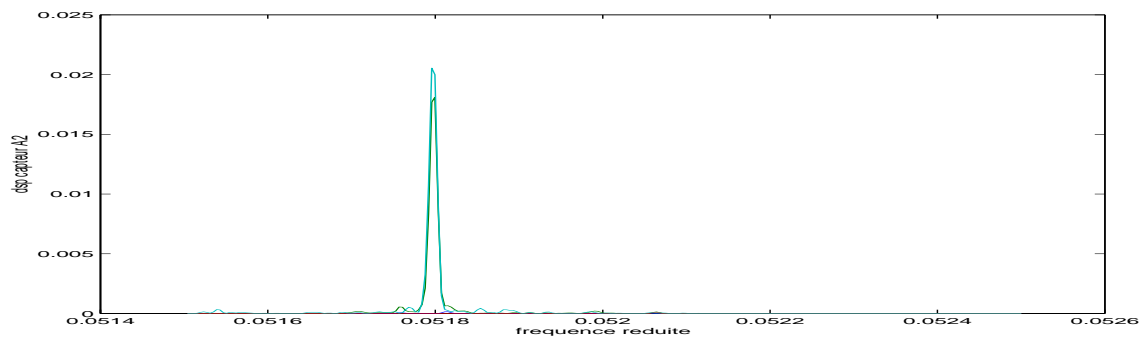


FIG. 7.69: capteur A2

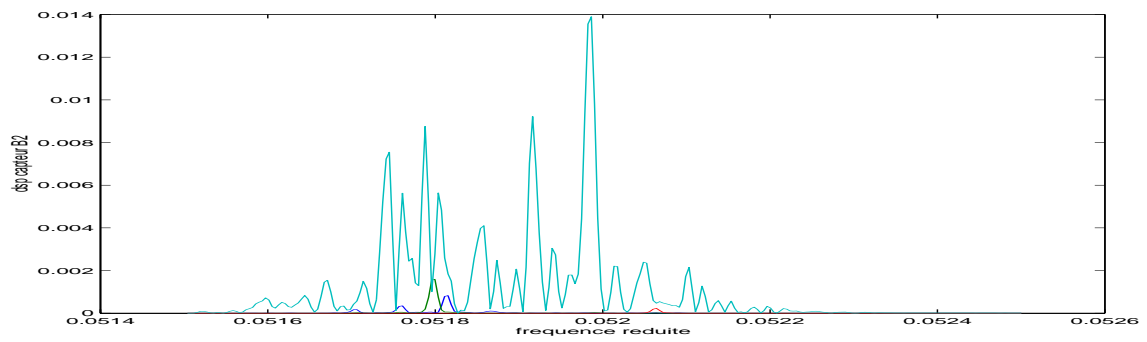


FIG. 7.70: capteur B2

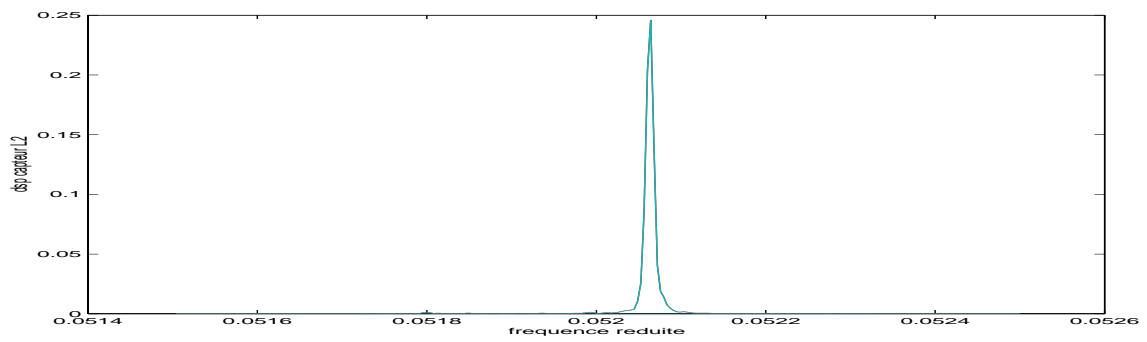


FIG. 7.71: capteur L2

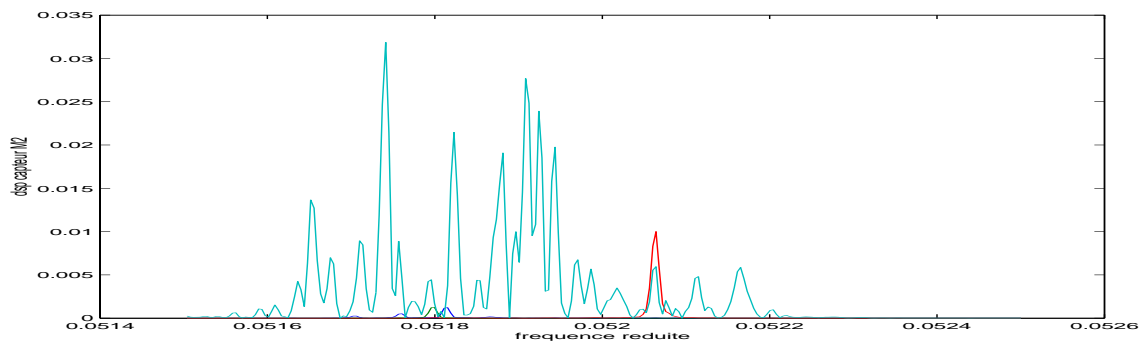


FIG. 7.72: capteur M2

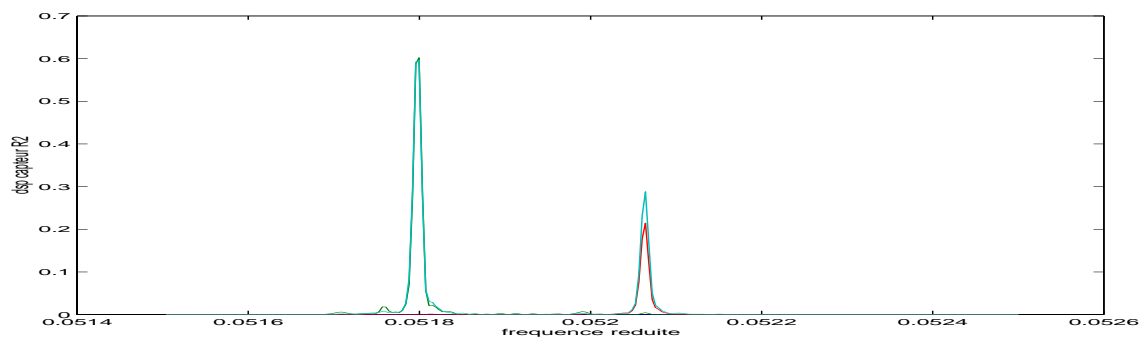


FIG. 7.73: capteur R2

Socle

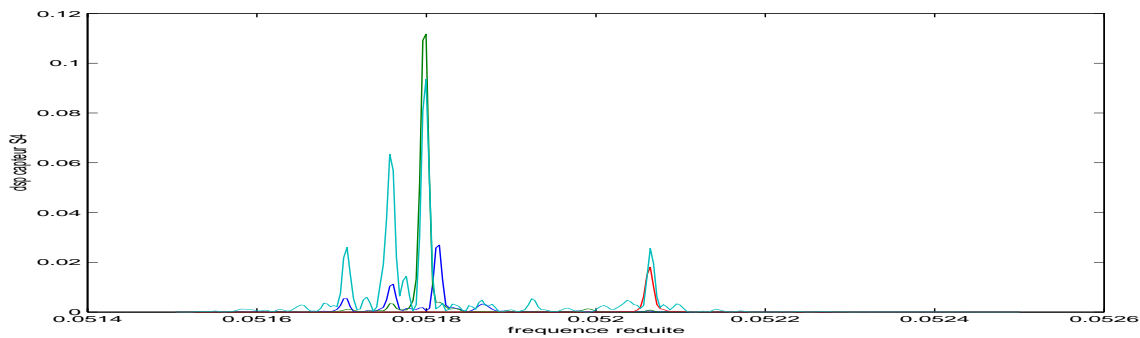


FIG. 7.74: capteur S4

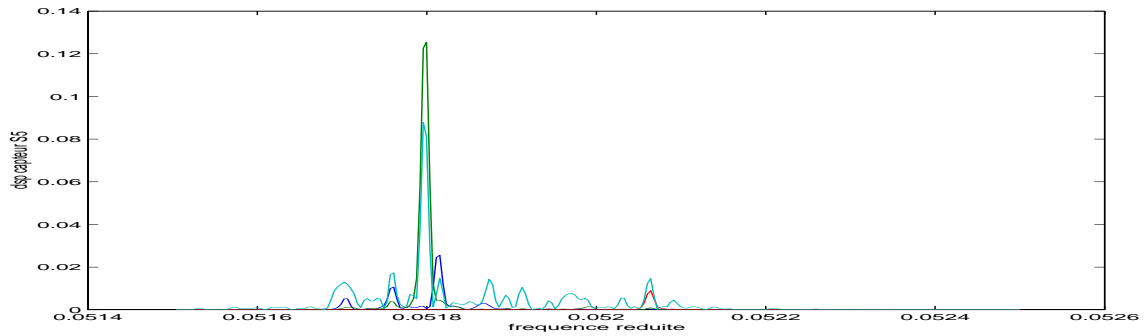


FIG. 7.75: capteur S5

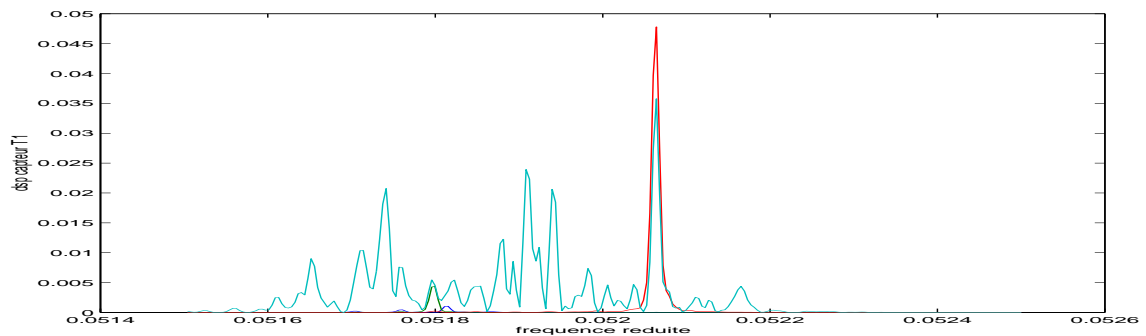


FIG. 7.76: capteur T1

Remarquons tout d'abord que les projections des trois sources sur les capteurs B1 et B2 sont quasiment nulles. Ceci est cohérent avec le fait que ces capteurs sont totalement décorrélés avec les autres.

Nous présentons aussi la cohérence entre chaque source estimée (en ordonnée) et les 14 capteurs (figure 7.77). On remarque bien que la source 2 (ici la raie modulée en fréquence) est présente très fortement sur l'ensemble 1 sauf pour les capteurs B1 et M1. Les cohérences sont proches de 1. Les conclusions sont analogues sur les contributions précédemment calculées. On la retrouve aussi sur la structure où elle est mélangée à une autre source. La cohérence est alors proche de 0.4. La source 2 n'est par contre pas présente sur l'ensemble 2 et nous pouvons donc en conclure qu'elle a été engendrée par un réducteur de l'ensemble 1.

La source 1 (de fréquence F2) est présente sur l'ensemble 2 et la structure (T1), et faiblement sur l'ensemble 1 (R1). Il est probable qu'elle provient d'un élément de l'ensemble 2. Elle est particulièrement forte sur le capteur L2 qui semble un capteur de référence pour cette source. La cohérence est proche de 1. La source 3 (de fréquence F1) est présente fortement sur la structure et sur le capteur R2 de l'ensemble 2 et faiblement sur tous les capteurs de l'ensemble 1. Elle pourrait avoir été engendrée par R2.

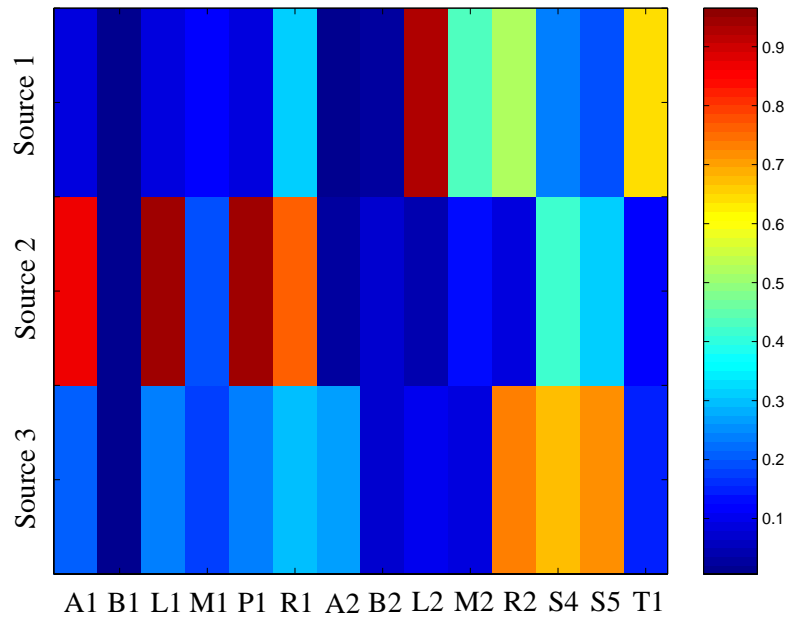


FIG. 7.77: Cohérence entre les sources estimées et les capteurs

7.6 Conclusion

Dans cette partie nous avons validé, sur des signaux expérimentaux issus d'un banc de machines tournantes, les hypothèses sur les signaux sources, les méthodes d'estimation du nombre de sources et de séparation de sources présentées aux chapitres précédents. Nous avons étudié les sources présentes dans les signaux par une analyse spectrale fine et validé le modèle des sources par rapport aux hypothèses faites dans les chapitres précédents.

Une première analyse de l'ensemble des signaux (cohérence, estimation du nombre de sources) nous a permis de choisir une bande de fréquence sur laquelle nous avons ensuite testé les différentes étapes de notre technique de séparation. Nous avons montré le comportement et la fiabilité des estimateurs du nombre de sources et des méthodes de séparation. Nous avons fait ressortir l'importance du blanchiment des données par des Matrices Spectrales Décalées lorsque les bruits ne sont pas spatialement blancs en comparant avec l'Analyse en Composantes Principales. Pour finir, nous avons effectué la séparation totale des données dans la bande de fréquence choisie sur tous les capteurs et l'interprétation possible de l'origine des trois sources estimées. Dans toutes ces étapes, nous nous sommes focalisés sur le choix du retard utilisé, la robustesse de la méthode vis-à-vis de ce retard et l'interprétation physique des résultats.

CONCLUSION

Conclusions et perspectives

L'objectif de ce travail était de montrer la faisabilité de la séparation de signaux vibratoires de machines tournantes à partir de données issues d'un banc de test de la Direction Générale pour l'Armement.

Les signaux vibratoires de machines tournantes possèdent une composante déterministe liée à la rotation et une composante aléatoire liée aux flux d'air circulant dans ces machines. La composante déterministe, modélisée comme une somme de fréquences pures, a suscité une discussion sur l'applicabilité des critères statistiques usuels en séparation de signaux. Le chapitre 1 s'est donc attaché à démontrer sous quelles conditions un couple de sinusoïdes déterministes peut être vu comme la réalisation d'un couple de variables aléatoires conjointement stationnaires, ergodiques et indépendantes. La composante aléatoire rayonnée vers tous les capteurs nous a conduit à considérer les bruits comme spatialement cohérents. Une telle hypothèse avait déjà été considérée en traitement d'antenne [BTGJ97], [Mar98] mais jamais en séparation aveugle de sources.

Aux chapitres 2 et 3, une synthèse des problèmes de séparation de signaux et un tour d'horizon des solutions existantes nous ont permis de constater que les algorithmes existants ne permettaient pas de séparer un mélange convolutif d'un nombre inconnu de sources en présence de bruits spatialement corrélés.

Pour scinder ce problème complexe en sous-problèmes plus simples et pour prendre en compte la forte dynamique spectrale des signaux vibratoires nous avons choisi d'opérer dans le domaine fréquentiel. Nous devons alors séparer, dans chaque canal de fréquence, un mélange instantané d'un nombre inconnu de sources en présence de bruits spatialement corrélés. Nous avons à nouveau découpé le problème en sous-problèmes disjoints :

- l'estimation du nombre de sources,
- le blanchiment spatial du signal utile (obtention d'un mélange orthogonal bruité),
- la recherche d'une base représentant mieux les sources et maximisant le rapport signal à bruit (sur chaque sortie une seule source est considérée comme un signal utile).

Pour s'affranchir des bruits spatialement corrélés nous avons fait l'hypothèse réaliste que leurs supports de corrélation sont limités. Nous avons alors introduit, au chapitre 4, les spectres décalés qui se définissent comme l'interspectre d'un signal et du même signal décalé temporellement. En faisant appel à des matrices spectrales décalées au lieu des matrices de covariances classiques nous avons mis en place de nouveaux estimateurs pour les trois étapes. Ces estimateurs fonctionnent aussi lorsque les bruits sont temporellement et spatialement blancs.

En termes d'estimation du nombre de sources nous avons tiré parti de la Décomposition en Valeurs Singulières des matrices spectrales décalées. En effet, celle-ci fournit des jeux de vecteurs singuliers à droite et à gauche contenant deux bases distinctes du sous-espace signal. Ceci a abouti à un premier estimateur du nombre de sources, minimisant une mesure de distance entre sous-espaces. Nous avons conçu un second estimateur appliquant des opérations de traitement d'image à la matrice des produits scalaires des vecteurs singuliers. Ces estimateurs sont présentés au chapitre 6 où des simulations illustrent leurs performances.

En terme de blanchiment spatial, il n'était pas possible d'utiliser directement une matrice spectrale décalée à la place de la matrice de covariance de l'Analyse en Composantes Principales. En effet, les matrices spectrales décalées sont non hermitiennes non nécessairement définies positives. En revisitant l'Analyse en Composantes Principales, pour les sources pseudo-périodiques, nous avons montré, au chapitre 5, que l'emploi de deux matrices spectrales décalées (de retard τ et -2τ) permettait de reconstruire la matrice de covariance des mélanges non bruités.

En terme de recherche d'une meilleure base nous avons montré, toujours au chapitre 5, qu'une simple Décomposition en Valeurs Propres de la matrice spectrale décalée des observations blanchies permet de retrouver la matrice unitaire recherchée.

Au chapitre 7 nous avons pu vérifier sur les données expérimentales que malgré des écarts constatés au modèle (sources modulées en fréquences, non-linéarités), les estimateurs proposés produisent des résultats fiables et qu'ils sont robustes au choix du décalage temporel. Sur ces données, après un même blanchiment, la recherche d'une meilleure base par notre méthode a été aussi performante que par la méthode JADE utilisant des statistiques d'ordre supérieur.

Malgré ces résultats encourageants nous devons insister sur le coût en calcul d'une séparation de signaux utilisant le modèle spectral. Il aurait été souhaitable de chiffrer ce coût en terme de nombre d'opérations et de le comparer aux méthodes existantes (dans le cadre de leur applicabilité et à résultats comparables). Notons cependant que dans certaines applications où la bande spectrale utilisée est limitée (communication à Modulation de Phase, RADAR, SONAR...) la mise en oeuvre de toutes les opérations en temps réel reste envisageable.

Nous ne sommes pas allés jusqu'au bout de la chaîne des traitements. Après la séparation dans chaque canal de fréquence, une estimation des permutations entre canaux est nécessaire. Des solutions ont déjà été apportées à ce problème [Cap95]. Il serait donc souhaitable de réaliser la séparation de sources à toutes les fréquences et de faire la reconstruction de spectres. On serait alors à même de fournir une interprétation physique sur l'origine des signatures vibratoires. En particulier il serait intéressant de restituer les contributions électriques (liées aux champs) et les contributions mécaniques (liées aux balourds).

Il serait aussi intéressant de choisir un modèle de sources un peu plus fin (sinusoïdes à amplitude, fréquence et phase aléatoires) et utiliser une méthode paramétrique. Dans le même ordre d'idée, la cyclostationnarité propre à certains signaux vibratoires pourrait aussi être utilisée.

On peut aussi envisager d'étendre les décalages temporels aux SOS (multispectres décalés)

pour pouvoir détecter et filtrer des signaux aléatoires non gaussiens à supports de corrélation “connus” . De telles études pourraient peut être trouver des applications dans d’autres domaines que la séparation de signaux.

Ce que vous avez lu est bien loin de la perfection car ...

“Il semble que la perfection soit atteinte non quand il n’y a plus rien à ajouter, mais quand il n’y a plus rien à retrancher [...] quand il nous est livré un objet aussi naturel qu’un galet poli par la mer ...”

Antoine de Saint Exupéry, *Terre des Hommes*

ANNEXES

Annexe A

Annexes du chapitre 1

A.1 Ergodisme au sens strict d'une sinusoïde à phase aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$

Soit le signal $X(t, \omega) = A \sin(2\pi f_1 t + \phi)$ à phase aléatoire $\phi(\omega)$ uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. Supposons qu'il existe une fonction g à valeurs réelles telle que $E[|g(X(t, \omega))|]$ soit fini. Ceci revient à supposer qu'il existe un réel positif β tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(A \sin(2\pi f_1 t + u))| \cdot p_\phi(u) \, du \leq \beta$$

Etant donné que $p_\phi(u)$ vaut $\frac{1}{2\pi}$ pour $u \in [0, 2\pi[$ et 0 ailleurs, l'inégalité s'écrit de façon équivalente

$$\int_0^{2\pi} |g(A \sin(2\pi f_1 t + u))| \, du \leq 2\pi\beta$$

En effectuant le changement de variable $v = \frac{u}{2\pi f_1}$ et en notant $T_1 = \frac{1}{f_1}$, on se rend compte que la fonction g vérifie la relation (1.1) que nous utiliserons ultérieurement.

$$\int_0^{T_1} |g(A \sin[2\pi f_1(v+t)])| \, dv \leq T_1\beta \quad (1.1)$$

Considérons une réalisation ω_0 et calculons

$$Y(\omega_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(X(t, \omega_0)) \, dt$$

Quelle que soit la réalisation ω_0 , comme $X(t, \omega_0)$ est périodique en t de période T_1 , $g(X(t, \omega_0))$ est aussi périodique en t de même période. On a donc

$$\forall T_1 \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad T = k.T_1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq \varepsilon < T_1$$

$$Y(\omega_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left[\int_0^{kT_1} g(X(t, \omega_0)) \, dt + \int_{kT_1}^T g(X(t, \omega_0)) \, dt \right]$$

$$Y(\omega_0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k.T_1 + \varepsilon} \int_0^{T_1} g(X(t, \omega_0)) dt + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k.T_1 + \varepsilon} \int_{kT_1}^{k.T_1 + \varepsilon} g(X(t, \omega_0)) dt \quad (1.2)$$

La valeur absolue de la seconde intégrale (sans la limite) est majorée par l'intégrale de la valeur absolue sur un intervalle de longueur ε , qui elle même est majorée par la même intégrale sur une période entière T_1 :

$$\left| \int_{kT_1}^{k.T_1 + \varepsilon} g(X(t, \omega_0)) dt \right| \leq \int_{kT_1}^{k.T_1 + \varepsilon} |g(X(t, \omega_0))| dt \leq \int_0^{T_1} |g(X(t, \omega_0))| dt$$

On a vu que la fonction g est absolument sommable sur une période de $X(t, \omega)$. De ce fait dans (1.2) la limite de la seconde intégrale tend vers zéro et l'on a :

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} g(X(t, \omega_0)) dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} g(A \sin(2\pi f_1 t + \phi_0)) dt$$

où $\phi_0 = \phi(\omega_0)$. En faisant le changement de variable $u = t + \frac{\phi_0}{2\pi f_1}$ on a

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{T_1 + t_0} g(A \sin(2\pi f_1 u)) du \quad \text{avec} \quad t_0 = \frac{\phi_0}{2\pi f_1}$$

et $g(A \sin(2\pi f_1 u))$ étant périodique de période T_1 , l'intégrale sur une période est indépendante de l'origine donc on a

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} g(A \sin(2\pi f_1 u)) du$$

$Y(\omega_0)$ est donc indépendant de la réalisation et correspond au terme constant de la décomposition en série de Fourier par rapport à t de la fonction déterministe périodique $g(A \sin(2\pi f_1 t + \phi_0))$. Ce terme noté B_0 est indépendant de la phase ϕ_0 .

Démontrons maintenant que $Y(\omega_0)$ est aussi égale à la moyenne d'ensemble $E[g(X(t, \omega))]$. Quelle que soit la réalisation du signal aléatoire, la fonction déterministe périodique $g(A \sin(2\pi f_1 t + \phi_0))$ se décompose en série de Fourier par rapport à t :

$$g(X(t, \omega_0)) = B_0 + \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} B_m(\phi_0) e^{j \frac{2\pi m}{T_1} t}$$

avec :

$$B_m(\phi_0) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} g(A \sin(2\pi f_1 t + \phi_0)) e^{-j \frac{2\pi m}{T_1} t} dt$$

Pour chaque réalisation, les coefficients complexes B_m de la série de Fourier dépendent de la phase à l'origine ϕ_0 , sauf le coefficient B_0 d'après la démonstration précédente. Notons que la

fonction $g(X(t, \omega_0))$ étant réelle les coefficients complexes vérifient la symétrie hermitienne $B_{-m} = B_m^*$.

On peut définir une décomposition en série de Fourier similaire pour le signal aléatoire $g(X(t, \omega))$, dans laquelle les coefficients B_m sont des variables aléatoires fonction de la variable ϕ .

$$g(X(t, \omega)) = B_0 + \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} B_m(\phi) e^{j \frac{2\pi m}{T_1} t}$$

Nous cherchons à calculer la moyenne d'ensemble $E[g(X(t, \omega))]$ par rapport au paramètre aléatoire ϕ . On sait d'après [Pic93, p.178] que $X(t, \omega)$ est stationnaire au sens strict, ce qui implique que $g(X(t, \omega))$ l'est aussi. En conséquence, $E[g(X(t, \omega))]$ est indépendant de t , quelque soit t . On en conclut, d'après la décomposition précédente que les termes $E[B_m(\phi)]$ sont nuls pour $m \neq 0$. Donc, nécessairement

$$E[g(X(t, \omega))] = B_0 = Y(\omega_0)$$

Ceci démontre aussi l'existence de $Y(\omega_0)$ que l'on avait supposé initialement.

A.2 Ergodisme au sens strict d'un couple de sinusoides à phase aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$

Soient les signaux $X_i(t, \omega) = A_i \sin(2\pi f_i t + \phi_i)$ ($i = 1, 2$) d'amplitudes A_i et fréquences f_i déterministes et de phases ϕ_i aléatoires indépendantes et uniformément réparties sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. Considérons une réalisation ω_0 et faisons le changement de variable $u = t + \frac{\phi_i}{2\pi f_i}$, $v = t + \frac{\phi_k}{2\pi f_k}$ de sorte que $g(X_i(t, \omega_0), X_k(t, \omega_0))$ puisse se noter comme une fonction de deux variables liées u et v . On peut aussi considérer l'ensemble des valeurs $g(u, v)$ obtenues pour toutes les valeurs possibles de u et v . Dans ce cas les variables ne sont plus considérées comme liées. La fonction $g(u, v)$ qui est périodique en u et en v , de périodes respectives T_i et T_k , admet une décomposition en série de Fourier par rapport à u , dans laquelle les coefficients A_m sont des fonctions de la variable v :

$$g(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(v) e^{j \frac{2\pi m}{T_i} u} \quad (1.3)$$

Nous allons utiliser cette expression de la Décomposition en Série de Fourier de $g(u, v)$ pour des valeurs particulières de u et v . Fixons maintenant la variable u ; g admet une décomposition en série de Fourier par rapport à v . Les coefficients $A_m(v)$ peuvent donc se réécrire de la manière suivante :

$$A_m(v) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_{l,m} e^{j \frac{2\pi l}{T_k} v}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

En remplaçant l'expression (1.4) dans la décomposition en série de Fourier (1.3) on obtient une expression de $g(u, v)$ valable quelques soient u et v :

$$g(X_i(t, \omega_0), X_k(t, \omega_0)) = A_{0,0} + \sum_{m \neq 0} \sum_{l \neq 0} A_{l,m} e^{j \frac{2\pi m}{T_i} u} e^{j \frac{2\pi l}{T_k} v}$$

En particulier, pour $u = t + \frac{\phi_i}{2\pi f_i}$ et $v = t + \frac{\phi_k}{2\pi f_k}$ on a :

$$g(X_i(t, \omega_0), X_k(t, \omega_0)) = A_{0,0} + \sum_{m \neq 0} \sum_{l \neq 0} A_{l,m} e^{j 2\pi \left(\frac{m}{T_i} \left(t + \frac{\phi_i}{2\pi f_i} \right) + \frac{l}{T_k} \left(t + \frac{\phi_k}{2\pi f_k} \right) \right)}$$

Considérons maintenant

$$Y(\omega_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(X_i(t, \omega_0), X_k(t, \omega_0)) dt, \quad \{i, k\} \in \{1, 2\}$$

$$Y(\omega_0) = A_{0,0} + \sum_{m \neq 0} \sum_{l \neq 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_{l,m} e^{j \left(2\pi \left(\frac{m}{T_i} + \frac{l}{T_k} \right) t + (m\phi_i + l\phi_k) \right)} dt$$

La première condition pour que le signal bidimensionnel $X_i(t, \omega) = A_i \sin(2\pi f_i t + \phi_i)$ ($i = 1, 2$) soit ergodique au sens strict est que la limite de la moyenne temporelle $Y(\omega_0)$ soit indépendante de la réalisation ω_0 , c'est à dire du couple de phases (ϕ_i, ϕ_k) . Or les termes $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_{l,m} e^{j \left(2\pi \left(\frac{m}{T_i} + \frac{l}{T_k} \right) t + (m\phi_i + l\phi_k) \right)} dt$ sont indépendants de (ϕ_i, ϕ_k) lorsque l'exponentielle complexe (de module borné) est véritablement fonction de t , soit $\frac{m}{T_i} \neq -\frac{l}{T_k}$. Ces termes sont alors tous nuls et $Y(\omega_0)$ existe et est une constante égale à $A_{0,0}$.

Démontrons maintenant que la moyenne d'ensemble $E[g(X_i(t, \omega), X_k(t, \omega))]$ est aussi égale à $A_{0,0}$. On peut définir une décomposition en série de Fourier similaire pour le signal aléatoire $g(X_i(t, \omega), X_k(t, \omega))$:

$$g(X_i(t, \omega), X_k(t, \omega)) = A_{0,0} + \sum_{m \neq 0} \sum_{l \neq 0} A_{l,m} e^{j 2\pi \left(\frac{m}{T_i} \left(t + \frac{\phi_i}{2\pi f_i} \right) + \frac{l}{T_k} \left(t + \frac{\phi_k}{2\pi f_k} \right) \right)}$$

où (ϕ_i, ϕ_k) est maintenant un couple de phases aléatoires. Comme les phases sont indépendantes et uniformément réparties, la moyenne d'ensemble de chaque terme est nulle, sauf pour le terme constant $A_{0,0}$.

Annexe B

Annexes du chapitre 2

B.1 TFD d'une convolution linéaire

Nous montrons que la TFD de la filtrée linéaire d'un signal $s(i)$ par le filtre $h(i)$ n'est pas exactement le produit des TFD de s et h . Outre l'effet de l'apodisation, un terme d'erreur apparaît.

Supposons que $h(i)$ est la r.i. d'un filtre causal RIF à L coefficients :

$$y(i) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) s(i-l) \quad (2.1)$$

L'apodisation de $y(i)$ par une fonction $a_N(i)$ sur la tranche $[t, \dots, t+N-1]$ s'écrit :

$$x(t+k) = a_N(k) y(t+k) \text{ pour } k \in [0, \dots, N-1] \quad (2.2)$$

La TFD de x s'écrit :

$$X^t(f) = \theta \sum_{k=0}^{N-1} x(t+k) e^{-j2\pi \frac{f}{N}k} \quad (2.3)$$

d'après (2.1) et (2.2) on a

$$X^t(f) = \theta \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{L-1} a_N(k) h(l) s(t+k-l) e^{-j2\pi \frac{f}{N}k} \quad (2.4)$$

$a_N(k)$ étant reliée à sa TFD $A_N(m)$ par :

$$a_N(k) = \beta \sum_{m=0}^{N-1} A_N(m) e^{j2\pi \frac{m}{N}k} \quad (2.5)$$

rappelons que les coefficients de la TFD et la TFDI sont reliés par :

$$N\beta\theta = 1$$

on a finalement :

$$\begin{aligned}
 X^t(f) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_N(m) \sum_{l=0}^{L-1} h(l) \sum_{k=0}^{N-1} s(t+k-l) e^{-j2\pi \frac{[f-m]k}{N}} \\
 X^t(f) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_N(m) \sum_{l=0}^{L-1} h(l) e^{-j2\pi \frac{[f-m]l}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} s(t+k-l) e^{-j2\pi \frac{[f-m](k-l)}{N}}
 \end{aligned}$$

où $[\cdot]$ désigne le modulo N :

$$[a] = a + bN \text{ avec } b \in \mathbb{Z} \text{ tel que } [a] \in [0, N-1]$$

en posant $u = k - l$ il vient :

$$X^t(f) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_N(m) \sum_{l=0}^{L-1} h(l) e^{-j2\pi \frac{[f-m]l}{N}} \sum_{u=-l}^{N-1-l} s(t+u) e^{-j2\pi \frac{[f-m]u}{N}}$$

La TFD $X^t(f)$ dépend de $N + L$ échantillons du signal temporel. Remplaçons la $\sum_{u=-l}^{N-1-l}()$ par $\sum_{u=-l}^{-1}() + \sum_{u=0}^{N-1}() - \sum_{u=N-l}^{N-1}()$. Dans cette écriture le terme central correspond (au coefficient θ près) à la TFD $S^t([f-m])$ de s sur la tranche temporelle débutant à l'indice t . **En supposant que $L < N$ on peut remplacer $\sum_{l=0}^{L-1}()$ par $\sum_{l=0}^{N-1}()$.** On a ainsi fait apparaître $\sum_{m=0}^{N-1} A_N(m) H([f-m]) S^t([f-m])$ qui est une convolution circulaire notée \otimes , et un terme d'erreur :

$$X^t(f) = \frac{1}{N\theta^2} A_N(f) \otimes [H(f) S^t(f)] + \varepsilon(a_N, f) \quad (2.6)$$

avec

$$\varepsilon(a_N, f) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_N(m) \sum_{l=1}^{L-1} h(l) \left[\sum_{u=-l}^{-1} s(t+u) e^{-j2\pi \frac{[f-m]u}{N}} - \sum_{u=N-l}^{N-1} s(t+u) e^{-j2\pi \frac{[f-m]u}{N}} \right] e^{-j2\pi \frac{[f-m]l}{N}} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon(a_N, f) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_N(m) \sum_{l=1}^{L-1} h(l) \left[\sum_{u=0}^{l-1} s(t+u) e^{-j2\pi \frac{[f-m]u}{N}} - \sum_{u=N}^{N+l-1} s(t+u) e^{-j2\pi \frac{[f-m]u}{N}} \right] \quad (2.8)$$

Remarque 1 : si $L > N$ le terme d'erreur est un peu plus compliqué.

Remarque 2 : si $s(t)$ est périodique de période N alors la $\sum_{u=0}^{l-1}()$ est identique à la $\sum_{u=N}^{N+l-1}()$ est l'erreur est nulle.

Remarque 3 : La fenêtre d'apodisation uniforme $a_N(t) = \Pi_N(t - N/2)$ est celle qui introduit le couplage le plus faible entre des fréquences distinctes puisqu'on a dans ce cas $A_N(f) = N\theta\delta(f)$. Les relations (2.6) et (2.8) deviennent :

$$X^t(f) = \frac{1}{\theta} H(f) S^t(f) + \varepsilon(a_N, f)$$

et

$$\varepsilon(a_N, f) = \theta \sum_{l=1}^{L-1} h(l) \left[\sum_{u=0}^{l-1} s(t+u) e^{-j2\pi \frac{f}{N} u} - \sum_{u=N}^{N+l-1} s(t+u) e^{-j2\pi \frac{f}{N} u} \right]$$

En choisissant $a_N(t) = \Pi_N(t - N/2)$ et $\theta = 1$ on a finalement :

$$X^t(f) = H(f) S^t(f) + \varepsilon(a_N, f)$$

avec

$$\varepsilon(a_N, f) = \sum_{l=1}^{L-1} h(l) \left[\sum_{u=0}^{l-1} s(t+u) e^{-j2\pi \frac{f}{N} u} - \sum_{u=N}^{N+l-1} s(t+u) e^{-j2\pi \frac{f}{N} u} \right] e^{-j2\pi \frac{f}{N} l}$$

B.2 Statistiques d'Ordre Supérieur

B.2.1 Fonctions caractéristiques

Soit x une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité $p_x(u)$ au sens des fonctions ou au sens des distributions. Cette ddp est la dérivée première de la fonction de répartition : $dF_x(u) = p_x(u) du$. On définit la première fonction caractéristique $\Phi_x(v)$ de la variable aléatoire x comme la transformée de Fourier de sa ddp :

$$\Phi_x(v) = \mathbb{E} [e^{jvx}] = \int_{\mathbb{R}} e^{jvu} dF_x(u)$$

Cette fonction est continue en tout point par rapport à la variable v . Elle vaut 1 à l'origine et l'on peut définir au voisinage de 0 la seconde fonction caractéristique $\Psi_x(v)$ comme suit :

$$\Psi_x(v) = \ln \Phi_x(v)$$

La fonction $\Phi_x(v)$ étant à valeurs complexes, \ln désigne le logarithme népérien complexe dont la définition est rappelée en B.2.11. Lorsque les fonctions caractéristiques admettent un développement en série de Taylor, les coefficients obtenus définissent respectivement les moments et les cumulants de x . Les cumulants d'ordre r s'expriment à l'aide des moments d'ordre inférieur ou égal à r . Insistons sur le fait que les moments et les cumulants ne sont pas définis pour toutes les lois de probabilité. Cette remarque est importante puisque dans la pratique on estime souvent des moments et des cumulants par des moyennes empiriques, mais on oublie parfois que la stationnarité et l'ergodisme ne suffisent pas à légitimer les moments ou les cumulants obtenus sur une réalisation des signaux.

B.2.2 Définition des moments et cumulants

Première fonction caractéristique

En introduisant dans l'écriture de la première fonction caractéristique, le développement en série entière (DSE) de l'exponentielle complexe au voisinage de 0 : $e^{jvx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(jvx)^k}{k!}$, on obtient l'expression de Φ_x en fonction des moments :

$$\Phi_x(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} j^k \frac{v^k}{k!} \mathbb{E}[x^k]$$

La fonctionnelle $\Phi_x(v)$ admet un développement en série de Taylor au voisinage de $v = 0$:

$$\Phi_x(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{v^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k \Phi_x(v)}{\partial v^k}$$

Par identification au voisinage de $v = 0$ on a l'expression des moments :

$$\mu_{(r)}[x] = \mathbb{E}[x^r] = (-j)^r \left. \frac{\partial^r \Phi_x(v)}{\partial v^r} \right|_{v=0}$$

Seconde fonction caractéristique

Etant donné que $\Phi_x(0) = 1$ et que $\Phi_x(u)$ est différentiable au voisinage de $u = 0$, la seconde fonction caractéristique est définie par :

$$\Psi_x(v) = \ln \Phi_x(v)$$

De même $\Psi_x(v)$ est continue et différentiable au voisinage de $v = 0$. On définit alors les cumulants comme suit :

$$\kappa_{(r)}[x] = \text{Cum}[\underbrace{x, \dots, x}_r] = (-j)^r \left. \frac{\partial^r \Psi_x(v)}{\partial v^r} \right|_{v=0} \quad (2.9)$$

Variables aléatoires multidimensionnelles

Soit $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ un vecteur aléatoire réel de dimension n . On définit la première fonction caractéristique de \mathbf{x} par :

$$\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \mathbb{E}[e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{x}}] \quad (2.10)$$

En développant l'exponentielle en série entière et $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ en série de Taylor au voisinage de $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ on obtient, par identification, l'expression des moments d'ordre r de \mathbf{x} :

$$\mu_{(r)}[\mathbf{x}] = \mathbb{E}[x_{a_1}^{i_1} \cdots x_{a_n}^{i_n}] = (-j)^r \frac{\partial^r \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})}{\partial u_{a_1}^{i_1} \cdots \partial u_{a_n}^{i_n}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \quad \text{avec } i_1 + \dots + i_n = r \quad (2.11)$$

Pour un vecteur aléatoire, la notation $\mu_{(r)}[\mathbf{x}]$ est imprécise car elle désigne n'importe quel moment d'ordre r obtenu à partir d'un jeu d'entiers vérifiant $i_1 + \dots + i_n = r$. L'écriture $\mathbb{E}[x_{a_1}^{i_1} \cdots x_{a_n}^{i_n}]$ présente l'avantage de faire disparaître les composantes du vecteur \mathbf{x} qui sont élevées à la puissance 0. Elle est suffisamment compacte pour pouvoir manipuler symboliquement tous les moments d'ordre r du vecteur aléatoire \mathbf{x} . Il n'en n'est pas de même pour les cumulants où la notation "puissance" doit être utilisée à bon escient.

Etant donné que $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = 1$ et que $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ est différentiable au voisinage de $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, on définit alors la seconde fonction caractéristique par :

$$\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \ln \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \quad (2.12)$$

De même $\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ est continue et différentiable au voisinage de $\mathbf{0}$. On définit alors les cumulants d'ordre r de \mathbf{x} comme suit :

$$\text{Cum} \left[\underbrace{x_{a_1}, \dots, x_{a_1}}_{i_1}, \dots, \underbrace{x_{a_n}, \dots, x_{a_n}}_{i_n} \right] = (-j)^r \frac{\partial^r \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})}{\partial u_{a_1}^{i_1} \cdots \partial u_{a_n}^{i_n}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \quad \text{avec } i_1 + \dots + i_n = r \quad (2.13)$$

$$= \kappa_{\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{a_n, \dots, a_n}_{i_n}}[\mathbf{x}] = \kappa_{(r)}[\mathbf{x}] \quad (2.14)$$

Comme pour les moments, la notation $\kappa_{(r)}[\mathbf{x}]$ est imprécise car elle désigne n'importe quel cumulants d'ordre r obtenu à partir d'un jeu d'entiers vérifiant $i_1 + \dots + i_n = r$. Insistons sur le fait que $\text{Cum}[x, x, x]$ est distinct de $\text{Cum}[x^3]$ ce qui explique la lourdeur de la notation. En effet :

- pour obtenir $\text{Cum}[x, x, x]$ on dérive une fois par rapport à chaque variable de la fonction caractéristique résultant de la ddp conjointe de $[x, x, x]^T$,
- pour $\text{Cum}[x^3]$ on dérive une fois par rapport à la variable de la fonction caractéristique résultant de la ddp de x^3 .

Il est possible de choisir une écriture plus compacte

$$\kappa_{(a_1, i_1), \dots, (a_n, i_n)}[\mathbf{x}] = (-j)^r \frac{\partial^r \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})}{\partial u_{a_1}^{i_1} \cdots \partial u_{a_n}^{i_n}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \quad \text{avec } i_1 + \dots + i_n = r$$

Malheureusement on ne rencontre pas cette notation dans la littérature.

B.2.3 Relation entre moments et cumulants.

Formule de Léonov et Shiryayev à l'ordre r :

$$\text{Cum}[x_1, \dots, x_r] = \sum_k (-1)^{k-1} (k-1)! \mathbb{E} \left[\prod_{i_1 \in V_1} x_{i_1} \right] \cdot \mathbb{E} \left[\prod_{i_2 \in V_2} x_{i_2} \right] \cdots \mathbb{E} \left[\prod_{i_k \in V_k} x_{i_k} \right]$$

où V_1, \dots, V_k sont des sous-ensembles disjoints formant une partition de $\{1, 2, \dots, r\}$. La somme est calculée sur l'ensemble des partitions possibles à k sous-ensembles, $1 \leq k \leq r$. Donnons l'exemple du calcul de $\text{Cum}[x_1, x_2, x_3]$:

$$\begin{aligned} \{(1, 2, 3)\} &\rightarrow k - 1 = 0 \\ \{(1), (2, 3)\} &\rightarrow k - 1 = 1 \\ \{(2), (1, 3)\} &\rightarrow k - 1 = 1 \\ \{(3), (1, 2)\} &\rightarrow k - 1 = 1 \\ \{(1), (2), (3)\} &\rightarrow k - 1 = 2 \end{aligned}$$

et l'on obtient :

$$\text{Cum}[x_1, x_2, x_3] = \text{E}[x_1 x_2 x_3] - [3] \text{E}[x_1] \text{E}[x_2 x_3] + 2 \text{E}[x_1] \text{E}[x_2] \text{E}[x_3]$$

Pour des variables centrées, les cumulants ont une écriture simple jusqu'à l'ordre 4 :

$$\text{Cum}[x_1, x_2] = \text{E}[x_1 x_2]$$

$$\text{Cum}[x_1, x_2, x_3] = \text{E}[x_1 x_2 x_3]$$

$$\text{Cum}[x_1, x_2, x_3, x_4] = \text{E}[x_1 x_2 x_3 x_4] - \text{E}[x_1 x_2] \text{E}[x_3 x_4] - \text{E}[x_1 x_3] \text{E}[x_2 x_4] - \text{E}[x_1 x_4] \text{E}[x_2 x_3]$$

B.2.4 Multilinéarité

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

– Multilinéarité des moments :

$$\text{E}[(\lambda_1 x_1^{i_1}) \dots (\lambda_n x_n^{i_n})] = \lambda_1 \dots \lambda_n \text{E}[x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}] \quad (2.15)$$

– Multilinéarité des cumulants :

$$\text{Cum}[(\alpha_1 + \lambda_1 x_1^{i_1}), \dots, (\alpha_n + \lambda_n x_n^{i_n})] = \lambda_1 \dots \lambda_n \text{Cum}[x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n}] \quad (2.16)$$

Contrairement aux moments, cette écriture signifie que les variables aléatoires sont les $(\alpha_k + \lambda_k x_k^{i_k})$ d'une part et les $x_k^{i_k}$ d'autre part. Le cumulant est obtenu en dérivant 1 fois par rapport à chacune des n variables de la seconde fonction caractéristique. En posant $y_k = x_k^{i_k}$ la multilinéarité s'écrit tout simplement :

$$\text{Cum}[(\alpha_1 + \lambda_1 y_1), \dots, (\alpha_n + \lambda_n y_n)] = \lambda_1 \dots \lambda_n \text{Cum}[y_1, \dots, y_n] \quad (2.17)$$

– Conséquence de la Multilinéarité des cumulants :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Leftrightarrow y_i = \sum_a A_{ia} x_a \Rightarrow \text{Cum}(y_i, y_j, y_k) = \sum_a \sum_b \sum_c A_{ia} A_{jb} A_{kc} \text{Cum}(x_a, x_b, x_c)$$

et par exemple :

$$\text{Cum}(ax + by, cx + dy, z) = ac \text{Cum}(x, x, z) + (ad + bc) \text{Cum}(x, y, z) + bd \text{Cum}(y, y, z)$$

B.2.5 Moments et cumulants de variables aléatoires indépendantes

– Cas des moments :

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs aléatoires indépendants constitués respectivement de n et p éléments. Les moments du vecteur $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T]^T$ obtenu par concaténation de \mathbf{x} et \mathbf{y} vérifient :

$$\mathbb{E} [z_1^{i_1} \cdot \dots \cdot z_{n+p}^{i_{n+p}}] = \mathbb{E} [x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}] \mathbb{E} [y_1^{i_{n+1}} \cdot \dots \cdot y_p^{i_{n+p}}]$$

Ces propriétés se déduisant directement de la définition des moments.

– Cas des cumulants :

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs aléatoires indépendants constitués respectivement de n et p éléments. Les cumulants du vecteur $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T]^T$ obtenu par concaténation de \mathbf{x} et \mathbf{y} vérifient :

$$\kappa_{(a_1, i_1), \dots, (a_n, i_n), (b_1, i_{n+1}), \dots, (b_p, i_{n+p})} [\mathbf{z}] = 0$$

et lorsque $n = p$:

$$\kappa_{(r)} [\mathbf{x} + \mathbf{y}] = \kappa_{(r)} [\mathbf{x}] + \kappa_{(r)} [\mathbf{y}]$$

Démonstration :

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs aléatoires complexes ou réels indépendants, de ddp respectives $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ et $p_{\mathbf{y}}(\mathbf{v})$. Le vecteur $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T]^T$ obtenu par concaténation de \mathbf{x} et \mathbf{y} a pour ddp $p_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = p_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) p_{\mathbf{y}}(\mathbf{v})$. Sa première fonction caractéristique se calcule à l'aide d'intégrales séparables d'où $\Phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{v})$ et donc la seconde fonction caractéristique vaut :

$$\Psi_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) + \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{v})$$

Les cumulants d'ordre $r = i_1 + \dots + i_{n+p}$ de \mathbf{z} s'écrivent :

$$\begin{aligned} \kappa_{(a_1, i_1), \dots, (a_n, i_n), (b_1, i_{n+1}), \dots, (b_p, i_{n+p})} [\mathbf{z}] &= (-j)^r \frac{\partial^r \Psi_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial u_{a_1}^{i_1} \dots \partial u_{a_n}^{i_n} \partial v_{b_1}^{i_{n+1}} \dots \partial v_{b_p}^{i_{n+p}}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \\ &= (-j)^r \frac{\partial^r \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})}{\partial u_{a_1}^{i_1} \dots \partial u_{a_n}^{i_n} \partial v_{b_1}^{i_{n+1}} \dots \partial v_{b_p}^{i_{n+p}}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \\ &\quad + (-j)^r \frac{\partial^r \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{v})}{\partial u_{a_1}^{i_1} \dots \partial u_{a_n}^{i_n} \partial v_{b_1}^{i_{n+1}} \dots \partial v_{b_p}^{i_{n+p}}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}, \mathbf{v}=\mathbf{0}} \end{aligned}$$

Si on a simultanément $n \neq 0$ et $p \neq 0$ alors,

$$\kappa_{(a_1, i_1), \dots, (a_n, i_n), (b_1, i_{n+1}), \dots, (b_p, i_{n+p})} [\mathbf{z}] = 0$$

car on dérive $\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ par rapport à \mathbf{v} et $\Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{v})$ par rapport à \mathbf{u} . Les seuls cumulants d'ordre r non nuls sont ceux qui ne font intervenir que des x_i ou que des y_l , d'où la propriété de sommation valable lorsque $n = p$:

$$\kappa_{(r)}[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = \kappa_{(r)}[\mathbf{x}] + \kappa_{(r)}[\mathbf{y}]$$

En effet, comme $\Phi_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = \int e^{j\mathbf{u}^T(\mathbf{v}+\mathbf{w})} p_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) d\mathbf{v} d\mathbf{w}$ en raison de l'indépendance des vecteurs aléatoires on obtient $\Phi_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{u})$ et $\Psi_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) + \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{u})$ et la suite de la démonstration est identique.

B.2.6 Cumulants des variables aléatoires gaussiennes

Les cumulants d'ordre supérieur ou égal à 3 d'un vecteur gaussien sont nuls.

B.2.7 Invariance par translation

Considérons un vecteur aléatoire complexe \mathbf{x} (les cumulants de v.a. complexes sont définis au paragraphe suivant) et un vecteur déterministe \mathbf{t} de même dimension. Le vecteur \mathbf{y} obtenu par translation $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{t}$ vérifie :

$$\Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = \mathbb{E} \left[e^{j \operatorname{Re}[\mathbf{x}^+ \mathbf{u} + \mathbf{t}^+ \mathbf{u}]} \right] = e^{j \operatorname{Re}[\mathbf{t}^+ \mathbf{u}]} \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$$

$$\Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = j \operatorname{Re}[\mathbf{t}^+ \mathbf{u}] + \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$$

- Les cumulants obtenus par dérivation de $\Psi_{\mathbf{y}}$, ne sont pas affectés par la translation déterministe, sauf le cumulants d'ordre 1.
- Les moments obtenus par dérivation de $\Phi_{\mathbf{y}}$, sont affectés par la translation déterministe.

B.2.8 Moments et cumulants de variables aléatoires à valeurs complexes

Définitions

Considérons le vecteur aléatoire \mathbf{z} et le vecteur déterministe \mathbf{u} , tous deux à valeurs complexes et de dimensions $N \times 1$. Leur produit scalaire est donné par :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{z} = \mathbf{x} + j\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z}^+ = \mathbf{x}^T - j\mathbf{y}^T \\ \mathbf{u} = \mathbf{v} + j\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{u}^+ = \mathbf{v}^T - j\mathbf{w}^T \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{z}^+ \mathbf{u} = (\mathbf{x}^T \mathbf{v} + \mathbf{y}^T \mathbf{w}) + j(\mathbf{x}^T \mathbf{w} - \mathbf{y}^T \mathbf{v})$$

Pour des vecteurs complexes on a $\mathbf{u}^+ \mathbf{z} = (\mathbf{z}^+ \mathbf{u})^*$ donc $\mathbf{z}^+ \mathbf{u} + \mathbf{u}^+ \mathbf{z} = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{z}^+ \mathbf{u}\} = 2(\mathbf{x}^T \mathbf{v} + \mathbf{y}^T \mathbf{w})$ d'où les deux écritures de la première fonction caractéristique, selon que l'on considère le vecteur aléatoire \mathbf{z} comme un couple de vecteurs aléatoires réels :

$$\Phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}) = \mathbb{E} \left[e^{j(\mathbf{x}^T \mathbf{v} + \mathbf{y}^T \mathbf{w})} \right] = \int_{\mathbb{R}^{2N}} e^{j(\mathbf{a}^T \mathbf{v} + \mathbf{b}^T \mathbf{w})} p_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) d\mathbf{a} d\mathbf{b}$$

ou comme un vecteur aléatoire complexe à part entière :

$$\Phi_{\mathbf{z}, \mathbf{z}^*}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \mathbb{E} \left[e^{j \left(\frac{\mathbf{z}^+ \mathbf{u} + \mathbf{u}^+ \mathbf{z}}{2} \right)} \right] = \int_{\mathbb{R}^{2N}} e^{j \left(\frac{\mathbf{t}^+ \mathbf{u} + \mathbf{u}^+ \mathbf{t}}{2} \right)} p_{\mathbf{z}, \mathbf{z}^*}(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) d\mathbf{t} d\mathbf{t}^*$$

En retenant la 2ème écriture, la seconde fonction caractéristique est :

$$\Psi_{\mathbf{z}, \mathbf{z}^*}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = \ln [\Phi_{\mathbf{z}, \mathbf{z}^*}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*)]$$

Les moments et les cumulants s'obtiennent par dérivation d'une fonction complexe de la variable complexe. On note $\kappa_{(p)}^{(q)}[\mathbf{z}]$ le cumulants obtenu en dérivant p fois sur \mathbf{u} et q fois sur \mathbf{u}^* .

B.2.9 Standardisation

Soit \mathbf{x} le vecteur aléatoire à N composantes, de moyenne $\mu_{(1)}[\mathbf{x}]$ et de matrice de covariance \mathbf{C} définie par :

$$\mathbf{C} = \mathbb{E} \left[(\mathbf{x} - \mu_{(1)}[\mathbf{x}]) (\mathbf{x} - \mu_{(1)}[\mathbf{x}])^+ \right] = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^+$$

La variable standardisée est :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^+ (\mathbf{x} - \mu_{(1)}[\mathbf{x}])$$

Elle vérifie :

$$\mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^+] = \mathbf{I}_N$$

Remarque 1. *En séparation de sources, dans le cas non bruité, l'opération préalable de blanchiment fournit des variables standardisées. En présence de bruit seule la partie utile du signal est standardisée.*

B.2.10 Circularité

Théorème 1. *Soit \mathbf{z} un vecteur aléatoire complexe dont les moments existent à tous les ordres. Le vecteur \mathbf{z} est circulaire si et seulement si :*

$$\forall (p, q), \mu_{(p)}^{(q)}[\mathbf{z}] = \mathbb{E} \left[\prod_{\sum a_i = p} x_i^{a_i} \prod_{\sum b_k = q} x_k^{*b_k} \right] = 0 \text{ pour } p \neq q$$

Corollaire 1. $\Phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{u})$, $\Psi_{\mathbf{z}}(\mathbf{u})$ et $p_{\mathbf{z}}(\mathbf{u})$ s'expriment uniquement en fonction de $\mathbf{u} \mathbf{u}^+$. En effet, le DSE de $\Phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{u})$ ou de $p_{\mathbf{z}}(\mathbf{u}) = p_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ par rapport à toutes les variables ne fait intervenir que des moments du type $\mu_{(p)}^{(p)}[\mathbf{z}]$ qui sont les coefficients des

$$\prod_{\sum a_i = p} u_i^{a_i} \prod_{\sum b_k = p} u_k^{*b_k}$$

Remarque 2. On voit dans l'exemple ci dessous que $\mathbf{u}\mathbf{u}^+$ décrit tous les produits symétriques d'ordre 2 et $(\mathbf{u}\mathbf{u}^+)^n$ idem pour les produits d'ordre n :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \rightarrow \mathbf{u}\mathbf{u}^+ = \begin{bmatrix} |u_1|^2 & u_1 u_2^* \\ u_1^* u_2 & |u_2|^2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{u}\mathbf{u}^+)^2 = (|u_1|^2 + |u_2|^2) \mathbf{u}\mathbf{u}^+ \rightarrow (\mathbf{u}\mathbf{u}^+)^n = (|u_1|^2 + |u_2|^2)^{n-1} \mathbf{u}\mathbf{u}^+$$

B.2.11 Logarithme népérien d'une variable complexe

La première fonction caractéristique $\Phi_x(v)$ étant une fonction complexe, il est sous-entendu qu'on utilise le logarithme népérien complexe pour définir la seconde fonction caractéristique $\Psi_x(v)$. Le logarithme népérien complexe étant une fonction multiforme (plusieurs formes possibles), il faut en choisir une en réalisant une coupure (choix de θ_c). Exemple :

$$\ln(z) = u = a + jb \Leftrightarrow z = e^u = e^a e^{jb}$$

$$z = |z| e^{j\theta} \implies \left\{ \begin{array}{l} a = \ln(|z|) \\ b = \theta, \theta \in [\theta_c, \theta_c + 2\pi[\end{array} \right\} \implies \ln(z) = \ln(|z|) + j\theta$$

Annexe C

Annexes du chapitre 4

C.1 Module du spectre décalé estimé en fonction de τ

C.1.1 Etude théorique

Reprenons la somme de sinusoides du paragraphe (4.4). On suppose que les composantes ν_1 à ν_K sont vues au canal f_0 de la TFD et que le couplage entre les fréquences négatives et positives est négligeable¹ on obtient d'après (4.7) (4.10) et (4.12) :

$$\mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}^\tau (f_0) \right] = \sum_{k=1}^K \frac{A_k^2}{4} \cdot \frac{R_{a_N} \left(\frac{f_0}{N} - \nu_k \right)}{R_{a_N} (0)} \cdot e^{-j2\pi\nu_k\tau}$$

Le module du spectre en fonction de τ est donné par :

$$\left| \mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}^\tau (f_0) \right] \right| = \left| \sum_{k=1}^K z_k \right| \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_k = |z_k| e^{j\phi_k} \\ |z_k| = \frac{A_k^2}{4} \cdot \frac{R_{a_N} \left(\frac{f_0}{N} - \nu_k \right)}{R_{a_N} (0)} \\ \phi_k = -2\pi\nu_k\tau \end{cases}$$

soit

$$\left| \mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}^\tau (f_0) \right] \right| = \sqrt{\sum_{k=1}^K |z_k|^2 + 2 \sum_{l=1}^{K-1} \sum_{m=l+1}^K \operatorname{Re} (z_l z_m^*)}$$

qui s'écrit aussi

$$\left| \mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}^\tau (f_0) \right] \right| = \sqrt{\sum_{k=1}^K |z_k|^2 + 2 \sum_{l=1}^{K-1} \sum_{m=l+1}^K |z_l| |z_m| \cos [2\pi (\nu_l - \nu_m) \tau]} \quad (3.1)$$

Le module du spectre est donc sujet à des battements en fonction de τ . Faisons deux remarques importantes concernant ces battements :

¹Ce couplage est induit par la convolution avec $R_{a_N} (\lambda)$.

1. En absence de bruit (ou pour $\tau > N + \tau_b$), le maximum des battements correspond à la dsp du signal utile :

$$\max_{\tau > N + \tau_b} \left(\left| \mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}^{\tau}(f_0) \right] \right| \right) = \sqrt{\sum_{k=1}^K |z_k|^2 + 2 \sum_{l=1}^{K-1} \sum_{m=l+1}^K |z_l| |z_m|} = \mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}(f_0) \right]$$

2. Pour une apodisation uniforme on peut majorer² l'écart entre deux composantes fréquentielles vues au même canal numérique : $|\nu_l - \nu_m| < \frac{1}{N}$. De ce fait les battements du spectre décalé ont une période supérieure à N . Cette remarque peut être avantageusement utilisée pour l'étude de signaux réels.

C.1.2 Simulations

- **Cas d'une sinusoïde noyée dans du bruit blanc gaussien** : Il s'agit de la situation décrite par les figures 4.2, 4.3 et 4.4 pour lesquelles $\tau_b = 1$. On présente le module des spectres décalés en fonction de τ dans le canal le plus proche de la sinusoïde (fréquence réduite $\nu_1 = 0.0994$, canal de fréquence centrale $f_1/N = 0.0938$). La puissance du bruit est choisie de telle sorte qu'au canal f_1 le RSB soit fixé successivement à -10 dB (figure C.1), 0 dB (figure C.2) et 10 dB (figure C.3). La taille des tranches de TFD est $N = 64$, le pas de glissement, qui est aussi l'incrément du retard τ est $L = 4$. Les retards successifs sont pris dans l'intervalle $[0, 4N]$. Les moyennes empiriques sont calculées sur 5000 tranches (environ 20000 échantillons). La barre verticale schématise la position du retard $\tau_0 = N + \widehat{\tau}_b$ à partir de laquelle la recherche du maximum est effectuée pour la mesure du RSB (voir paragraphe suivant). On observe que pour un retard supérieur à τ_0 le module du spectre décalé est plat. La valeur du RSB imposé et celle du RSB mesuré, toutes deux indiquées sur les figures, illustrent l'efficacité de la méthode.
- **Cas d'une somme de deux sinusoïdes noyées dans du bruit uniforme non blanc** : Il s'agit de la situation décrite par les figures 4.5, 4.6 et 4.7, pour lesquelles la bande du bruit en fréquence réduite est $[0.08, 0.12]$ donc $\tau_b \simeq \frac{1}{0.04} = 25$ échantillons. On présente le module des spectres décalés en fonction de τ dans le canal contenant les deux sinusoïdes (fréquences réduites $\nu_1 = 0.0964$ et $\nu_2 = 0.0918$, canal de fréquence centrale $f_1/N = 0.0938$). La puissance du bruit est choisie de telle sorte qu'au canal f_1 le RSB soit fixé successivement à -10 dB (figure C.4), 0 dB (figure C.5) et 10 dB (figure C.6). La taille des tranches de TFD est $N = 64$, le pas de glissement est $L = 8$. Les retards successifs sont pris dans l'intervalle $[0, 4N]$. Les moyennes empiriques sont calculées sur 5000 tranches (environ 40000 échantillons). On observe que pour un retard supérieur à $\tau_0 = N + \widehat{\tau}_b$ le module du spectre décalé possède un battement faible malgré le facteur de sous-échantillonnage de 8.
- **Cas d'un bruit uniforme non blanc en absence de signal utile** : la situation décrite par la figure est semblable à la précédente mais le signal utile a été supprimé.

²Les tables des fenêtres quadratiques (méthode du périodogramme moyenné) indiquent que la bande à 3dB de la fenêtre naturelle est incluse dans $[-\frac{1}{2N}, \frac{1}{2N}]$.

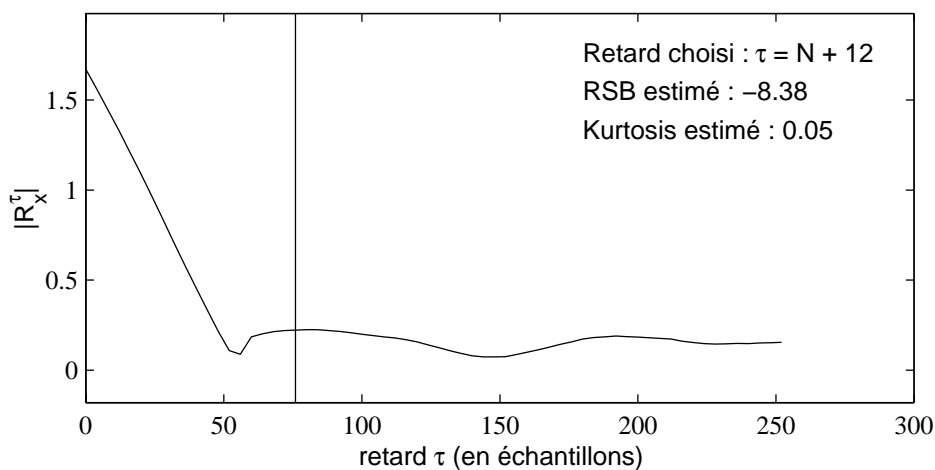


FIG. C.1: Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, RSB imposé -10 dB.

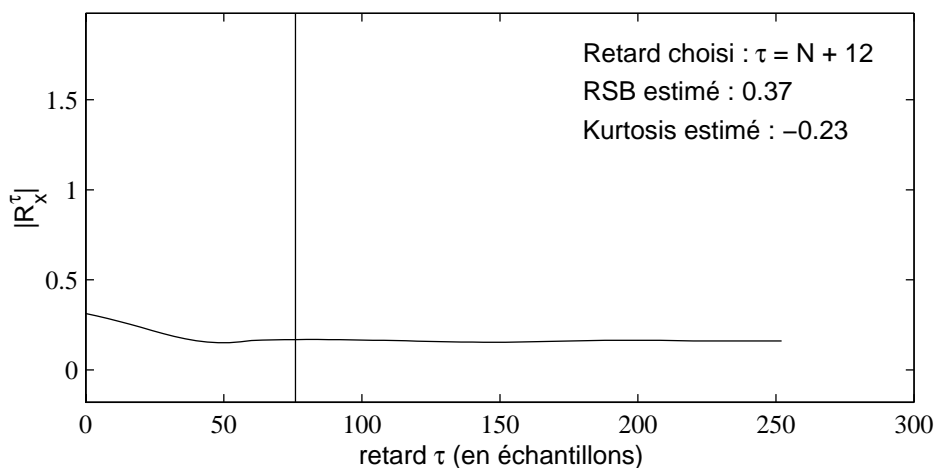


FIG. C.2: Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, RSB imposé 0 dB.

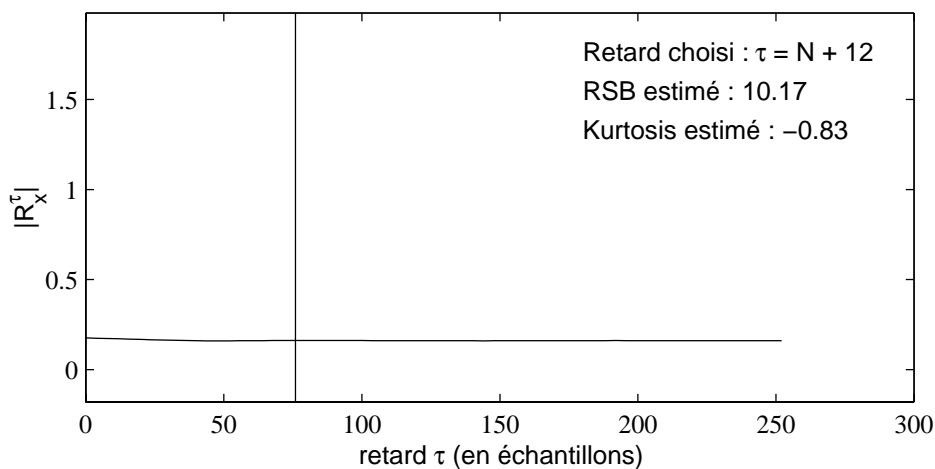


FIG. C.3: Un bruit blanc gaussien, une sinusoïde, RSB imposé 10 dB.

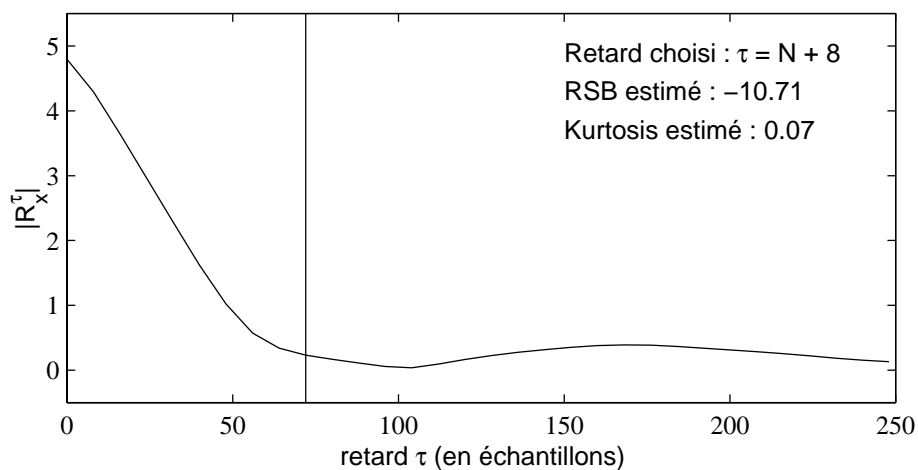


FIG. C.4: Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes, RSB imposé -10 dB.

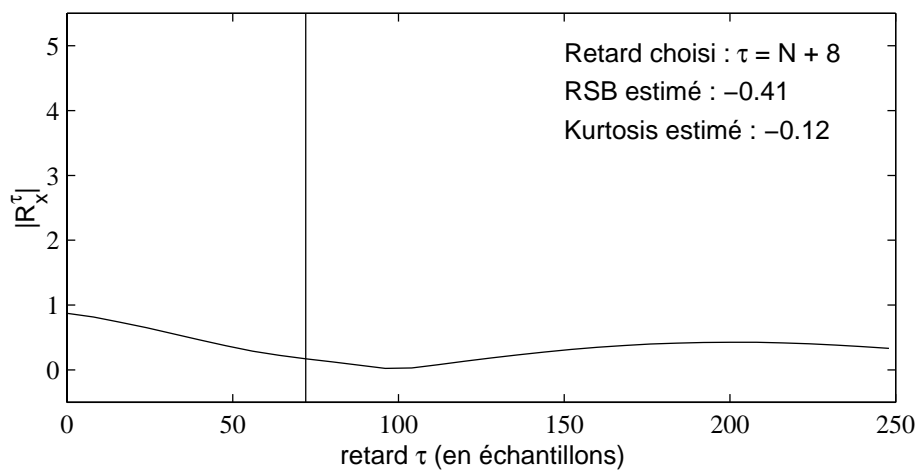


FIG. C.5: Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes, RSB imposé 0 dB.

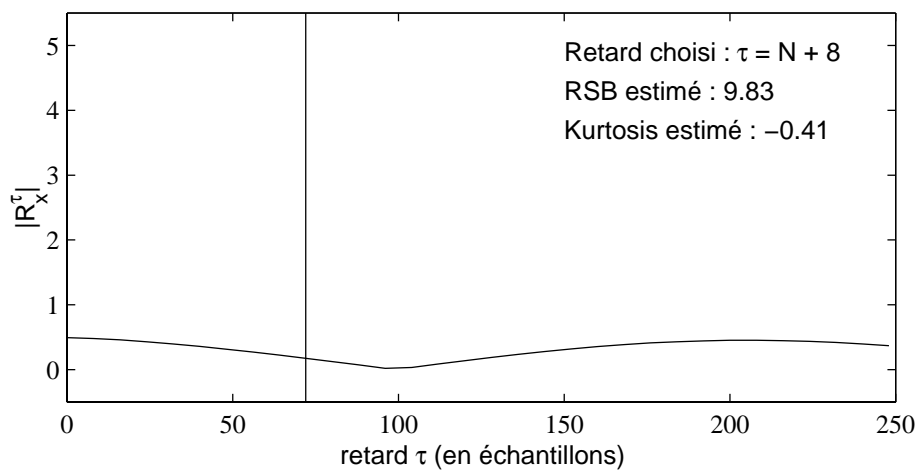


FIG. C.6: Un bruit non blanc uniforme, deux sinusoïdes, RSB imposé 10 dB.

La puissance du bruit est la même qu'à la figure C.4. Les figures sont très ressemblantes et l'on ne saurait dire a priori quelle est celle où le signal utile est absent.

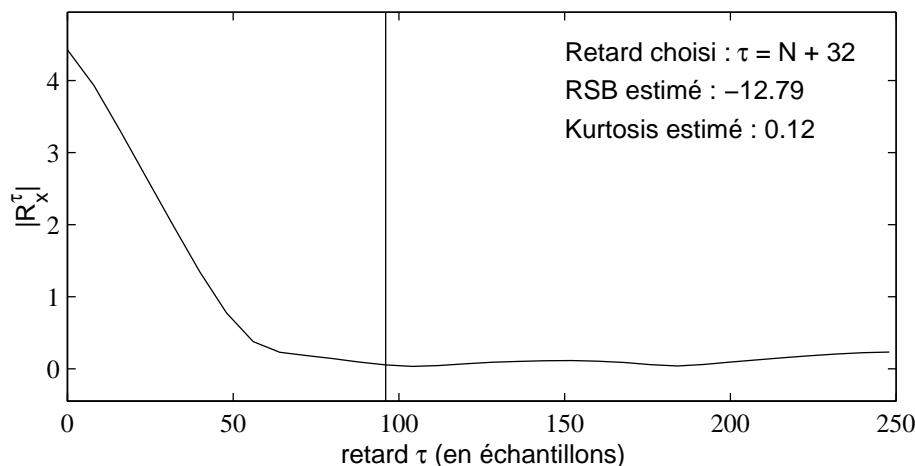


FIG. C.7: Un bruit non blanc uniforme, aucune source.

C.2 Un estimateur du RSB pour les données expérimentales

Le spectre décalé permet de mesurer le RSB dans un canal de fréquence, pour un mélange inconnu d'un nombre inconnu de sinusoïdes et de bruits. On suppose que le choix de $\tau_0 = N + \hat{\tau}_b$ (barre verticale sur les figures ci-dessus) est tel que les valeurs de τ supérieures à τ_0 limitent fortement l'influence du bruit. En supposant que le biais de l'estimateur est faible le maximum du module du spectre décalé, pour $\tau > \tau_0$, correspond au spectre du mélange non bruité. Nous en dérivons une méthode de mesure du RSB en trois étapes :

1. Estimation de la dsp du signal utile :

$$\widehat{R}_{ss}(f_0) = \max_{\tau > N + \tau_b} \left| \mathbb{E} \left[\widehat{R}_{ss}^\tau(f_0) \right] \right|$$

2. Estimation de la dsp du bruit : En notant $\widehat{R}_{xx}^0(f_0)$ l'estimée du spectre au retard nul avec le coefficient de calibration $A = \frac{1}{\sum_{l=-N+1}^{N-1} C_{a_N}(l)}$ on a :

$$\widehat{R}_{bb}(f_0) = \widehat{R}_{xx}^0(f_0) - \widehat{R}_{ss}(f_0)$$

3. Mesure du RSB :

$$\widehat{RSB}(f_0) = 10 \log_{10} \left(\frac{\widehat{R}_{ss}(f_0)}{\widehat{R}_{bb}(f_0)} \right)$$

Remarque : pour la séparation de sources il serait possible de retrouver la matrice spectrale des mélanges non bruités en effectuant cette recherche de maximum sur chacun des

capteurs, mais cette technique qui nécessiterait le calcul des spectres décalés à tous les retards pour tous les capteurs et dans tous les canaux serait bien plus coûteuse que celle que nous avons développé et qui utilise seulement deux retards. La méthode que nous indiquons ici permet simplement de sonder le niveau de bruit dans un canal bien choisi et de nous guider lors du choix de la résolution N de sorte que les canaux soient suffisamment étroits pour ne pas intégrer trop de bruit.

C.3 Caractères non nécessairement hermitien et défini positif des Matrices Spectrales Décalées

Soit $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ la Matrice Spectrale Décalée du signal vectoriel $\mathbf{r}(t)$ au canal fréquentiel f et au retard τ . Remarquons que l'on peut écrire cette matrice sous la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\mathbf{H}^+ \quad (3.2)$$

dans laquelle \mathbf{H} , de taille $n \times c$, est de rang plein dans les colonnes et $\boldsymbol{\theta} = \text{diag}(e^{j\theta_1}, \dots, e^{j\theta_c})$.

$$\mathbf{A}_{ik} = \sum_l H_{il} H_{kl}^* e^{j\theta_l}$$

On vérifie directement que, dans le cas général, la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ n'est pas hermitienne, en constatant que

$$\mathbf{A}_{ki} \neq \mathbf{A}_{ik}^*$$

Rappelons qu'une matrice \mathbf{A} est définie positive ssi $\mathbf{x}^+ \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, pour tout \mathbf{x} non nul. L'expression du terme général de \mathbf{A} donnée précédemment permet aussi d'écrire

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \implies y_i = \sum_k \sum_l H_{il} H_{kl}^* e^{j\theta_l} x_k$$

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{y} = \sum_i \sum_k \sum_l H_{il} H_{kl}^* e^{j\theta_l} x_k x_i^*$$

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau \mathbf{x} = \sum_l \left(\underbrace{\left(\sum_k H_{kl}^* x_k \right)}_{z_l} \underbrace{\left(\sum_i H_{il} x_i^* \right)}_{z_l^*} e^{j\theta_l} \right)$$

On aboutit finalement à un résultat qui montre que selon les termes de phase de $\boldsymbol{\theta}$, la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau$ n'est pas nécessairement définie positive :

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau \mathbf{x} = \sum_l |z_l|^2 e^{j\theta_l}$$

En revanche dans le cas d'une matrice spectrale symétrique, $\boldsymbol{\theta}$ est remplacée par la matrice identité et l'on a un résultat toujours positif ou nul :

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}^\tau \mathbf{x} = \sum_l |z_l|^2$$

Annexe D

Annexes du chapitre 5

D.1 Choix des paramètres du séparateur

D.1.1 Introduction

Les deux paramètres essentiels de notre méthode sont la taille N des tranches de TFD et le retard τ_0 pour le calcul des spectres décalés. Le choix de N fixe la résolution fréquentielle ($\frac{1}{N}$ en fréquence réduite) en entrée du séparateur. Pour des sources à spectre de raies, cette résolution influe sur le nombre $c(f, N)$ de sources présentes dans chaque canal numérique ainsi que sur le RSB et sur la qualité du mélange. Le bon choix de N dépend du contenu fréquentiel des signaux et du nombre de capteurs disponibles.

Nous effectuons le choix de τ par l'étude du module du spectre décalé en fonction de τ . Ce choix n'est valide que si les bruits sont à corrélation limitée et les sources sont des sommes de fréquences pures. Pour pouvoir confirmer ces hypothèses il faut que la résolution fréquentielle soit bien choisie. Les deux paramètres sont donc liés et seront choisis simultanément en utilisant les critères exposés au paragraphe suivant.

D.1.2 Critères utilisés

1. **Coût en calcul** : Compte tenu du nombre d'opérations à effectuer dans chaque canal de fréquence on cherche à réaliser la séparation avec la résolution la plus grossière possible. On procède à une validation de N par valeurs décroissantes. Pour cela on choisit une fréquence test et l'on étudie, à chaque résolution, le canal numérique le plus proche de cette fréquence. Ce canal numérique est dénommé *canal test*.
2. **Conditionnement du mélange** : Le conditionnement d'une matrice \mathbf{H} est défini par :

$$\text{cond}(\mathbf{H}) = \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^\#\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne n'importe quelle norme matricielle et $\mathbf{H}^\#$ la pseudo-inverse de \mathbf{H} . Lorsque l'on choisit la norme 2 le conditionnement correspond au rapport de la valeur singulière

la plus forte à sa valeur singulière la plus faible :

$$\text{cond}(\mathbf{H}) = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{H})}{\lambda_{\min}(\mathbf{H})}$$

Une matrice est bien conditionnée si ce nombre est proche de 1. Lorsqu'elle n'est pas de rang plein alors $\lambda_{\min}(\mathbf{H}) = 0$ et $\text{cond}(\mathbf{H}) = +\infty$. La matrice \mathbf{H} qui nous intéresse est la matrice de mélange au canal f après normalisation des sources. Elle est de taille $n \times c(f, N)$ avec $c(f, N) \leq n$. L'estimation du nombre de sources et la séparation sont d'autant plus efficaces que le mélange est bien conditionné. Dans la pratique il est difficile de prouver que les observations sont bien conditionnées. En revanche certains mélanges mal conditionnés peuvent être détectés à l'aide des cohérences entre les capteurs. Rappelons que la cohérence au canal f entre $r_i(t)$ et $r_k(t)$ est définie par

$$\rho_{r_i r_k}(f) = \frac{R_{r_i r_k}(f)}{\sqrt{R_{r_i r_i}(f) \cdot R_{r_k r_k}(f)}}$$

et qu'elle vérifie la relation suivante :

$$|\rho_{r_i r_k}(f)| = 1 \Leftrightarrow r_i^t(f) = \alpha(f) \cdot r_k^t(f)$$

Dans le cas qui nous intéresse r_i^t et r_k^t s'expriment (relations 4.1 et 4.2) comme un mélange de sources s_p^t et de bruits b_q^t centrés et deux à deux indépendants.

$$r_i^t = \sum_{p=1}^{c(f,N)} H_{ip} s_p^t + \sum_{q=1}^{n_b} G_{iq} b_q^t \quad (4.1)$$

$$r_k^t = \sum_{p=1}^{c(f,N)} H_{kp} s_p^t + \sum_{q=1}^{n_b} G_{kq} b_q^t \quad (4.2)$$

Lorsque r_i^t et r_k^t sont fortement cohérents alors on est dans l'une des situations suivantes :

- a. $H_{ip} \simeq \alpha \cdot H_{kp}$ pour $p = 1 \dots c(f, N)$ et le niveau de bruit est très faible sur ces capteurs,
- b. $G_{iq} \simeq \alpha \cdot G_{kq}$ pour $q = 1 \dots n_b$ et le niveau de signal est très faible sur ces capteurs,
- c. $r_i \simeq \alpha \cdot r_k$ et le niveau du signal et du bruit sont comparables.

Dans les situations a. et c. l'existence d'une combinaison linéaire entre deux lignes de \mathbf{H} dégrade le conditionnement du mélange. On supprime l'un des deux capteurs. On réitère l'opération jusqu'à obtenir un ensemble $\mathcal{R}(f, N)$ de $n_d(f, N)$ capteurs faiblement cohérents. Dans le cas b. l'existence de deux observations très perturbées par le bruit ou très peu énergétiques peut aussi être assimilée à un mauvais conditionnement du mélange. Le fait de retirer le capteur r_i par exemple a tendance à améliorer le conditionnement. Pour pouvoir caractériser de façon quantitative ce que l'on entend par *fortement cohérent* ou *faiblement cohérent* il faut choisir un seuil de cohérence, noté C_{\max} . Si au canal numérique traité la cohérence entre deux capteurs dépasse le seuil, l'une des deux observations n'est pas utilisée. On retire en priorité les capteurs qui ont le plus grand nombre de relations de cohérence.

3. **Choix du retard** : Le retard τ_0 ($\tau_0 = N + \hat{\tau}_b$) doit être choisi préalablement à l'estimation du nombre de sources. Pour faire ce choix on estime le spectre décalé des $n_d(f, N)$ capteurs en faisant varier τ de 0 à $4N$ par exemple. On représente sur une même figure le module des spectres décalés en fonction de τ , au canal test. Ces courbes doivent être décroissantes pour traduire une perte de puissance du bruit. Il existe une valeur τ_0 de τ à partir de laquelle le module de tous les spectres décalés se "stabilise" pour traduire la conservation de la puissance des sources. Ce choix de τ_0 sera conservé pour toutes les résolutions.
4. **Nombre de sources par canal** : Dans chaque canal de fréquence le nombre de sources $\hat{c}(f, N)$ est estimé à partir des $n_d(f, N)$ capteurs disponibles. En contexte fortement bruité il est souhaitable de choisir une résolution suffisamment fine pour que $\hat{c}(f, N)$ soit petit devant $n_d(f, N)$ afin de disposer de références bruit pour l'étape de réduction de bruit.
5. **RSB en entrée du séparateur** : plus les canaux sont larges (N faible) plus ils intègrent de bruit. Etant donné que les signaux utiles sont à spectres de raies, plus N est faible plus le RSB est mauvais, sauf lorsque le changement de résolution intègre des sources puissantes dans le canal considéré. Nous disposons d'un outil pour mesurer le RSB. Ceci permet de choisir une résolution telle que le RSB mesuré au canal test sur tous les capteurs soit supérieur à un seuil noté RSB_{\min} . On considérera que les conditions sont semblables dans les autres canaux. Pour bénéficier des performances optimales du séparateur il est conseillé de ne pas descendre en dessous de $RSB_{\min} = 0\text{dB}$.
6. **Kurtosis spectral** : Notons $\widehat{K}_{r_i}(f, N)$ l'estimée du kurtosis spectral de l'observation r_i au canal f . Dans la pratique le bruit est gaussien ou rendu gaussien par le calcul de la TFD. De ce fait chaque canal f tel que $\hat{c}(f, N) = 1$ doit vérifier $\widehat{K}_{r_i}(f, N) = -1$ pour $i = 1, \dots, n_d(f, N)$. On tolère une erreur Δ_K (en valeur absolue) sur l'estimée du Kurtosis. Si le kurtosis de l'un des capteurs sort de la plage $[-1 - \Delta_K; -1 + \Delta_K]$ la valeur actuelle de N ne peut pas être retenue. On choisira la précédente.

D.1.3 Algorithme utilisé

La méthode que nous proposons est un exemple de stratégie pour le choix de N et τ . Elle ne saurait remplacer l'expérience de l'utilisateur et/ou une connaissance plus fine des signaux traités.

1. Choisir les paramètres arbitraires :
 - T : nombre d'échantillons traités (durée d'intégration) ;
 - M_{\min} : nombre minimal de tranches glissantes pour les estimateurs spectraux ;
 - R : taux de recouvrement des tranches : $R = \frac{N-L}{N} \Leftrightarrow L = N(1-R)$ où L désigne le pas de glissement entre les tranches successives. Le choix optimal vis-à-vis du coût en calcul et de la variance des estimateurs spectraux est $R = 50\%$;

- $a_N(t)$: fenêtre d'apodisation. On préférera la fenêtre uniforme qui nécessite la résolution la moins fine pour localiser des fréquences pures ;
 - C_{\max} : cohérence maximale tolérée entre capteurs dans un canal (0.8 par exemple).
 - Δ_K : écart absolu toléré sur le kurtosis d'une source (0.2 par exemple) ;
 - RSB_{\min} : RSB minimal toléré dans le canal test (0 dB par exemple).
2. Réaliser le centrage du signal sur l'ensemble des échantillons qui vont être réellement utilisés (et non sur l'ensemble des échantillons existants).
 3. Initialiser $N = N_{\max}$ où N_{\max} est choisi de telle sorte que l'on puisse calculer le spectre décalé au retard $4N$:

$$T \geq N + (M_{\min} - 1)(1 - R)N + 4N \Rightarrow N_{\max} = 2^{\text{Ent}\left(\log_2\left[\frac{T}{5(M_{\min}-1)(1-R)}\right]\right)}$$

où Ent désigne la partie entière.

4. Calculer les TFD glissantes des n capteurs.
5. Calculer les kurtosis spectraux $\widehat{K}_{r_i}(f, N)$ pour $i \in [1, N]$ et $f \in [0, N/2]$.
6. Calculer et afficher sur une même figure les dsp des capteurs pour $f \in [0, N/2]$.
7. Sur cette figure marquer les canaux f tels que $\forall i \in [1, N], -1 - \Delta_K \leq \widehat{K}_{r_i}(f, N) \leq -1 + \Delta_K$.
8. La variable **NbCanDisp** compte les canaux qui vérifie la condition (7) :
 - (a) si **NbCanDisp=0** choisir pour f_0 le canal qui a le Kurtosis le plus faible ;
 - (b) si **NbCanDisp=1** le canal désigné est le canal test f_0 ;
 - (c) Sinon laisser l'utilisateur choisir f_0 parmi les canaux marqués.
9. Calculer l'ensemble des cohérences inter-capteurs $C_{r_i r_k}(f_0, N), \forall i, k \in [1, N]$.
10. A l'aide du seuil C_{\max} , sélectionner le jeu $\mathcal{R}(f_0, N)$ des $n_d(f_0, N)$ capteurs faiblement cohérents.
11. Calculer le spectre décalé des $n_d(f_0, N)$ capteurs pour $\tau \in [0, 4N]$.
12. Afficher sur une même figure leurs modules en fonction de τ .
13. L'utilisateur détermine graphiquement le retard τ_0 tel que
$$\tau > \tau_0 \Rightarrow |R_{r_i}^{\tau}(f_0, N)| \simeq \text{cte pour } i = 1, n_d(f_0, N)$$
14. Mesurer le RSB sur chacun des capteurs : $\widehat{RSB}_i(f_0, N)$.
15. Si $\exists i \in \mathcal{R}(f, N)$ tel que $\widehat{RSB}_i(f_0, N) < RSB_{\min}$ passer à l'étape (24).
16. Calculer $\widehat{c}(f_0, N)$ à l'aide de τ_0 et des $n_d(f_0, N)$ capteurs faiblement cohérents.
17. Si $\forall i \in \mathcal{R}(f, N), -1 - \Delta_K \leq \widehat{K}_{r_i}(f_0, N) \leq -1 + \Delta_K$ mais que $\widehat{c}(f, N) > 1$ passer à l'étape (24).
18. Si $\widehat{c}(f_0, N) = n$ passer à l'étape (24).

19. Si $\widehat{c}(f_0, N) = 0$ alors : si $\text{NbCanDisp} > 1$ retourner à l'étape (9) sinon passer à l'étape (28).
20. Changement de résolution : $N/2 \rightarrow N$.
21. Pour cette résolution trouver le canal f_0 le plus proche de la fréquence test.
22. Calculer $\widehat{K}_{r_i}(f_0, N)$ pour $i \in [1, N]$.
23. Retourner à l'étape (9).
24. La résolution d'entrée du séparateur est atteinte : si $N < N_{\max}$ alors $2N \rightarrow N$ sinon on conserve la résolution N_{\max} mais on indique que la canal f_0 est peut être mal choisi.
25. Effectuer le zoom fréquentiel du canal traité pour observer la forme d'onde des sources et leurs fréquences respectives.
26. Effectuer la séparation de sources au canal test f_0 .
27. Vérifier les résultats à l'aide d'un zoom fréquentiel.
28. Fin.

D.1.4 Remarque Importante

L'estimateur du nombre de sources réalise une DVS de la matrice spectrale décalée au retard τ_0 . Le séparateur réalise quant à lui une inversion de cette matrice. Ces opérations sont stables lorsque la partie utile des signaux est de puissance comparable sur tous les capteurs. En effet, il faut éviter qu'une ligne de la matrice de mélange ne soit affectée d'un gain énorme par rapport aux autres. Dans la pratique il s'agit d'un problème de calibrage des capteurs. Ils doivent être calibrés non par rapport aux puissances des bruits, comme cela est habituellement fait, mais par rapport aux dsp des signaux utiles. Nous allons montrer que cette opération peut être réalisée postérieurement à l'acquisition. On utilise pour cela la diagonale de la matrice spectrale décalée. Remarquons qu'en général le problème ne se pose pas sur les colonnes de la matrice de mélange car les capteurs ne sont pas tous placés près d'une même source.

Soit \mathbf{H} une matrice de mélange 3×2 dont tous les coefficients sont du même ordre de grandeur. Appliquons un gain α à la première ligne de \mathbf{H} . on obtient \mathbf{H}_α :

$$\mathbf{H}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha H_{11} & \alpha H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \end{bmatrix}$$

En supposant que les sources sont normalisées et que leur matrice spectrale décalée s'écrit

$$\mathbf{R}_{\text{ss}}^\tau = \begin{bmatrix} e^{j\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{j\theta_2} \end{bmatrix}$$

Si le choix de τ_0 permet de supprimer totalement l'influence du bruit, la matrice spectrale décalée des observations vaut tout simplement $R_{\text{rr}}^\tau = \mathbf{H}_\alpha \mathbf{R}_{\text{ss}}^\tau \mathbf{H}_\alpha^+$. Après calcul on a :

$$R_{\text{rr}}^\tau = \begin{bmatrix} \alpha^2 \left(|H_{11}|^2 e^{j\theta_1} + |H_{12}|^2 e^{j\theta_2} \right) & \alpha \left(H_{11} H_{21}^* e^{j\theta_1} + H_{12} H_{22}^* e^{j\theta_2} \right) & \alpha \left(H_{11} H_{31}^* e^{j\theta_1} + H_{12} H_{32}^* e^{j\theta_2} \right) \\ \alpha \left(H_{21} H_{11}^* e^{j\theta_1} + H_{22} H_{12}^* e^{j\theta_2} \right) & |H_{21}|^2 e^{j\theta_1} + |H_{22}|^2 e^{j\theta_2} & H_{21} H_{31}^* e^{j\theta_1} + H_{22} H_{32}^* e^{j\theta_2} \\ \alpha \left(H_{31} H_{11}^* e^{j\theta_1} + H_{32} H_{12}^* e^{j\theta_2} \right) & H_{31} H_{21}^* e^{j\theta_1} + H_{32} H_{22}^* e^{j\theta_2} & |H_{31}|^2 e^{j\theta_1} + |H_{32}|^2 e^{j\theta_2} \end{bmatrix}$$

Si α est très grand devant 1 alors les éléments de la sous matrice 2×2 inférieure droite sont très faibles par rapport aux autres et en particulier par rapport à celui d'indices (1, 1).

En l'absence d'un modèle de propagation des sources et d'informations sur la calibration des capteurs la seule façon de supprimer le coefficient α est de normaliser le vecteur des observations par la racine carrée du module des spectres décalés :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{|R_{r_1}^\tau|}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{|R_{r_2}^\tau|}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{|R_{r_3}^\tau|}} \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

Le nouveau vecteur d'observation a donc pour matrice spectrale décalée :

$$R_{\mathbf{xx}}^\tau = \begin{bmatrix} 1 & \frac{H_{11}H_{21}^*e^{j\theta_1} + H_{12}H_{22}^*e^{j\theta_2}}{\alpha_1\alpha_2} & \frac{H_{11}H_{31}^*e^{j\theta_1} + H_{12}H_{32}^*e^{j\theta_2}}{\alpha_1\alpha_3} \\ \frac{H_{21}H_{11}^*e^{j\theta_1} + H_{22}H_{12}^*e^{j\theta_2}}{\alpha_1\alpha_2} & 1 & \frac{H_{21}H_{31}^*e^{j\theta_1} + H_{22}H_{32}^*e^{j\theta_2}}{\alpha_2\alpha_3} \\ \frac{H_{31}H_{11}^*e^{j\theta_1} + H_{32}H_{12}^*e^{j\theta_2}}{\alpha_1\alpha_3} & \frac{H_{31}H_{21}^*e^{j\theta_1} + H_{32}H_{22}^*e^{j\theta_2}}{\alpha_2\alpha_3} & 1 \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{|H_{11}|^2 e^{j\theta_1} + |H_{12}|^2 e^{j\theta_2}} \\ \alpha_2 &= \sqrt{|H_{21}|^2 e^{j\theta_1} + |H_{22}|^2 e^{j\theta_2}} \\ \alpha_3 &= \sqrt{|H_{31}|^2 e^{j\theta_1} + |H_{32}|^2 e^{j\theta_2}} \end{aligned}$$

D.1.5 Contrôle des résultats

Sur des signaux réels il est possible de valider, dans un canal de fréquence, les hypothèses d'une somme de fréquences pures en réalisant un *filtrage passe-bande* (ou passe-bas) suivi d'une *opération de démodulation* et d'un *sous-échantillonnage*. En réalisant cette analyse spectrale fine avant et après séparation il est possible de déterminer si les motifs attribués à chaque source ont bien été séparés.

Annexe E

Annexes du chapitre 7

E.1 Zoom fréquentiel d'un canal de TFD

Soit $x(t)$ un signal échantillonné à la période T_e et $a_N(t)$ une fonction d'apodisation non nulle sur N échantillons. Notons $X^\tau(f)$ ou encore $X(f, \tau)$ la TFD de $x(t) \cdot a_N(t - \tau)$ au canal fréquentiel f . La famille $X(f, \tau)$, pour τ croissant par pas d'un échantillon, constitue un signal complexe échantillonné à la période T_e . Ce signal analytique est une filtrée de $x(t)$ dans la bande $\left[\frac{f-n_0}{NT_e}; \frac{f+n_0}{NT_e}\right]$ où n_0 dépend de la fenêtre d'apodisation choisie. Comme l'illustre la figure E.1 la bande filtrée correspond approximativement à celle du premier lobe spectral de $a_N(t)$. Pour une apodisation de Hamming ou de Hanning, n_0 vaut 2 et pour une apodisation uniforme n_0 vaut 1.

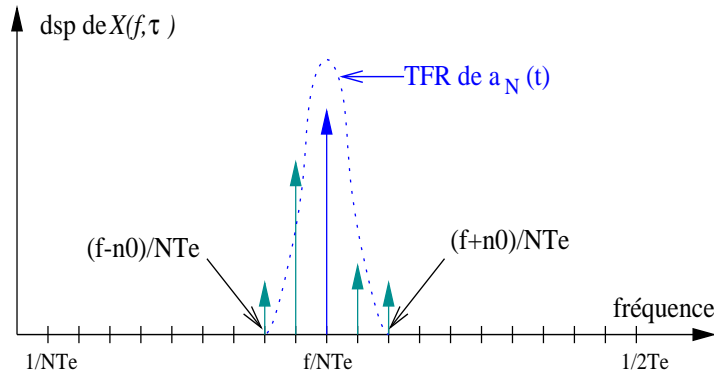


FIG. E.1: d.s.p. de $X(f, \tau)$ à la résolution $1/NT_e$.

Pour déterminer le contenu fréquentiel de $X(f, \tau)$ il faut effectuer une analyse spectrale haute résolution. Il existe deux solutions simples :

1. multiplier N par le facteur de zoom souhaité, recalculer les TFD glissantes de $x(t)$ et conserver la bande $\left[\frac{f-n_0}{NT_e}; \frac{f+n_0}{NT_e}\right]$,
2. réaliser un zoom fréquentiel du canal f par démodulation complexe, sous-échantillonnage puis TFD.

La deuxième solution est bien moins coûteuse. La démodulation complexe (relation 5.1) est réalisée par rapport à la fréquence centrale $\frac{f}{NT_e}$. Cette opération ramène le signal en bande de base (figure E.2). L'objectif est d'utiliser au mieux l'axe des fréquences et d'offrir le facteur de sous-échantillonnage maximal.

$$\tilde{X}(f, \tau) = X(f, \tau) e^{-j2\pi \frac{f}{N} \tau} \quad (5.1)$$

Le signal démodulé $\tilde{X}(f, \tau)$ possède une bande utile ($\frac{2n_0}{NT_e}$) petite par rapport à la bande passante du signal temporel d'origine ($\frac{1}{T_e}$). On peut donc le sous-échantillonner fortement par rapport à τ . En sous-échantillonnant $\tilde{X}(f, \tau)$ d'un facteur L on obtient le signal d'indice temporel k noté $\tilde{X}(f, k, L)$. Pour respecter la condition de Shannon il faut que $L \leq \frac{N}{2n_0}$ de sorte que la bande utile ($\frac{2n_0}{NT_e}$) soit inférieure à la nouvelle fréquence d'échantillonnage ($\frac{1}{LT_e}$).

Comme le montre la figure E.2, une analyse spectrale de $\tilde{X}(f, k, L)$ par TFD sur K points permet maintenant de représenter la bande utile du signal par M valeurs au lieu de $(2n_0)$. On obtient M de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{l} K \text{ points} \longleftrightarrow \text{bande } 1/LT_e \\ M \text{ points} \longleftrightarrow \text{bande } 2n_0/NT_e \end{array} \right\} \implies M = \frac{2n_0 K L}{N}$$

La résolution fréquentielle est maintenant de $(1/K.L.T_e)$ au lieu de $(1/N.T_e)$. Le facteur de zoom vaut $\frac{1/N.T_e}{1/K.L.T_e} = \frac{M}{2n_0} = \frac{KL}{N}$ et l'on vérifie bien que pour $K = N$ le facteur de zoom est égal au facteur de sous-échantillonnage.

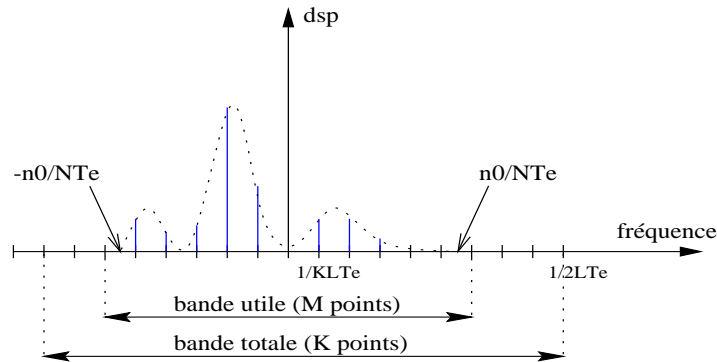


FIG. E.2: Spectre du signal démodulé sous-échantillonné

Etudions à présent le cas où le signal $x(t)$ est la somme de p sinusoïdes proches, vues au canal f mais non résolues :

$$x(t) = \sum_{i=1}^p X_i \cos \left(2\pi \left(\frac{f}{N} + \alpha_i \right) t + \phi_i \right), \quad \alpha_i \in [-n_0/N; n_0/N] \quad \forall i \in [1, p]$$

Calculons la TFD de $x(t)$ au canal f en posant $N\beta_N\theta_N = 1$:

$$X(f, \tau) = \theta_N \sum_{n=0}^{N-1} x(n + \tau) a_N(n) e^{-j2\pi \frac{f}{N} n}$$

En négligeant la contribution des fréquences $(-\frac{f}{N} - \alpha_i)$ on obtient :

$$X(f, \tau) = \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{2} e^{j(2\pi(\frac{f}{N} + \alpha_i)\tau + \phi_i)} \theta_N \sum_{n=0}^{N-1} a_N(n) e^{j2\pi\alpha_i n}$$

étant donné que $a_N(t)$ est une fonction non nulle uniquement pour $t \in [0, N-1]$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_N(n) e^{j2\pi\alpha n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_N(n) e^{j2\pi\alpha n} = A_N(-\alpha) = A_N(\alpha)$$

où $A_N(\alpha)$ est la TFR de $a_N(t)$. On a finalement

$$X(f, \tau) = \theta_N \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{2} A_N(\alpha_i) e^{j(2\pi(\frac{f}{N} + \alpha_i)\tau + \phi_i)}$$

Après démodulation complexe à la fréquence réduite $\frac{f}{N}$ on obtient :

$$\tilde{X}(f, \tau) = \theta_N \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{2} A_N(\alpha_i) e^{j(2\pi\alpha_i\tau + \phi_i)}$$

On rappelle que dans le cas particulier d'une apodisation uniforme

$$a_N(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, N-1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A_N(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha N)}{\sin(\pi\alpha)} e^{-j\pi\alpha(N-1)}$$

En sous-échantillonnant $\tilde{X}(f, \tau)$ d'un facteur L on obtient

$$\tilde{X}(f, k, L) = \theta_N \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{2} A_N(\alpha_i) e^{j(2\pi\alpha_i k L + \phi_i)}$$

Calculons la TFD du signal $\tilde{X}(f, k, L)$ sur K points (avec l'apodisation uniforme car elle offre la meilleure localisation fréquentielle) au canal de fréquence $\frac{g}{K}$:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(f, g, L) &= \theta_K \sum_{k=0}^{K-1} \tilde{X}(f, k, L) e^{-j2\pi \frac{g}{KL} k L} \\ \tilde{X}(f, g, L) &= \theta_N \theta_K \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{2} A_N(\alpha_i) e^{j\phi_i} \sum_{k=0}^{K-1} e^{j2\pi(\alpha_i L - \frac{g}{K})k} \\ \tilde{X}(f, g, L) &= \theta_N \theta_K \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{2} A_N(\alpha_i) e^{j\phi_i} \frac{\sin \pi(\alpha_i L - \frac{g}{K}) K}{\sin \pi(\alpha_i L - \frac{g}{K})} e^{-j\pi L(\alpha_i L - \frac{g}{K})(K-1)} \end{aligned}$$

Le canal g_i qui voit le mieux la composante α_i est celui qui vérifie

$$\frac{g_i - 1/2}{KL} < \alpha_i < \frac{g_i + 1/2}{KL}$$

Etant donné que l'on a utilisé une fenêtre uniforme pour l'analyse spectrale haute résolution, on sépare les composantes α_i et α_l qui vérifient

$$|\alpha_i - \alpha_l| \geq \frac{2}{KL}$$

Remarque 1 : Dans la pratique pour limiter le coût du zoom fréquentiel on réalise le sous-échantillonnage avant la démodulation (le signal temporel filtré par TFD glissante au canal f a une bande petite car ses composantes sont les écarts à la fréquence centrale $\frac{f}{NT_e}$. Il suffit que $L \leq \frac{N}{2n_0}$ de sorte que le signal obtenu respecte la condition de Shannon avant TFD). Le facteur de sous-échantillonnage correspond alors au pas de glissement de la première série de TFD, réduisant grandement le nombre d'opérations. Lorsque le sous-échantillonnage est effectué d'abord, il faut simplement prendre en compte le pas de sous-échantillonnage lors de la démodulation. Revenons au cas des fréquences pures : on a dans un premier temps le signal sous-échantillonné

$$X(f, k, L) = \theta_N \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{2} A_N(\alpha_i) e^{j(2\pi(\frac{f}{N} + \alpha_i)kL + \phi_i)}$$

puis le signal démodulé

$$\tilde{X}(f, k, L) = X(f, k, L) e^{-j2\pi\frac{f}{N}kL} = \theta_N \sum_{i=1}^p \frac{X_i}{2} A_N(\alpha_i) e^{j(2\pi\alpha_i kL + \phi_i)}$$

Remarque 2 : on serait tenté de dire que $\tilde{X}(f, \tau)$ est l'enveloppe complexe du signal réel bande étroite ($X(-f, \tau) + X(f, \tau)$). Ce n'est pas le cas car comme le montre la figure E.2 le spectre de $X(f, \tau)$ n'est pas nécessairement à symétrie hermitienne autour de la fréquence centrale $\frac{f}{NT_e}$. De ce fait si l'on démodule simultanément $X(f, \tau)$ et $X(-f, \tau)$ les motifs interfèrent en bande de base.

Remarque 3 : Comme le montre la figure E.3, la durée d'intégration correspondant au zoom spectral (i.e. le nombre d'échantillons du signal temporel ayant permis d'obtenir le spectre zoomé) est $(K - 1) \cdot L + N$.

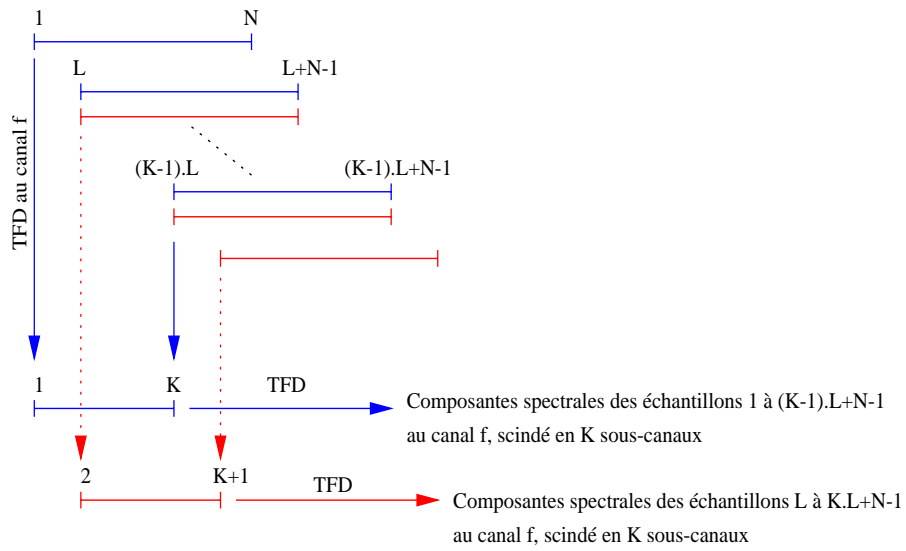


FIG. E.3: Durée d'intégration associée au zoom spectral

Bibliographie

- [BAMCM97] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso, and E. Moulines. A blind source separation technique using second-order statistics. *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45 :433–444, 1997.
- [BLF53] A. Blanc-Lapierre and R. Fortet. *Théorie Des Fonctions Aléatoires*. Masson, 1953.
- [Bri81] D.R. Brillinger. *Time Series Data Analysis and Theory*. Holden-Day, 1981.
- [BS95] A. Bell and T. Sejnowski. An information-maximization approach to blind separation and blind de convolution. *Neural Computation*, vol. 7 :1004–1034, 1995.
- [BTGJ97] S. Bozinoski, A. Taleb, J.-C. Guizzo, and C. Jutten. Séparation de sources - application à la séparation de signaux et de brouilleurs dans un satellite de télécommunications. In *GRETSI*, pages 95–98, 97.
- [Cap95] V. Capdevielle. *Séparation de Sources Large Bande À L'aide Des Moments D'ordre Supérieur*. PhD thesis, INPG, Grenoble, nov 1995.
- [Car90] J.-F. Cardoso. Eigen-structure of the fourth-order cumulant tensor with application to the blind source separation problem. In *Proc. ICASSP*, pages 2655–2658, 1990.
- [Car96] J.F. Cardoso. Quelques principes de séparation de sources. In *Ecole Des Techniques Avancées En Signal Image Parole*, pages 245–253, Grenoble, France, sept 1996.
- [Car98a] J.-F. Cardoso. Blind signal separation : statistical principles. *Proceedings of the IEEE. Special issue on blind identification and estimation*, (10) :2009–2025, October 1998.
- [Car98b] J.-F. Cardoso. Infomax and maximum likelihood for blind signal separation. *IEEE. Signal Processing Letters*, (4) :112–114, 1998.
- [C.C92] C.Capdessus. *Aide Au Diagnostic Des Machines Tournantes Par Traitement Du Signal*. PhD thesis, INPG, Grenoble, déc 1992.
- [CCC99] P. Chevalier, V. Capdevielle, and P. Comon. Performance of higher order blind source separation methods : Experimental results on ionospheric HF links. In *Proc. ICA*, pages 443–448, Aussois, France, 1999.

- [CCM93] E. Chaumette, P. Comon, and D. Muller. ICA based technique for radiating sources estimation : Application to airport surveillance. *IEEE Proceedings-F*, vol. 140(6) :0, Dec 1993.
- [Che95] P. Chevalier. Méthodes aveugles de filtrage d'antennes. *REE*, vol. 3 :48–58, 1995.
- [CM96] E. Chaumette and D. Muller. Séparation de sources aux ordres supérieurs : Application au garbling en radar secondaire. In *Ecole Des Techniques Avancées En Signal Image Parole*, pages 245–253, Grenoble, France, sept 1996.
- [Com85] P. Comon. *Traitements de signaux magnétiques multivariés*. PhD thesis, INPG, 1985.
- [Com86] P. Comon. Estimation multivariable complexe. *Traitement du Signal*, vol. 3(2) :97–101, 1986.
- [Com90] P. Comon. Analyse en Composantes Indépendantes et identification aveugle. *Traitement du Signal*, vol. 7(3) :435–450, December 1990. Numero special non lineaire et non gaussien.
- [Com94a] P. Comon. Circularité et signaux aléatoires à temps discret. *Traitement du Signal*, vol. 11(5) :417–420, dec 1994.
- [Com94b] P. Comon. Independent Component Analysis, a new concept? *Signal Processing, Elsevier*, vol. 36(3) :287–314, April 1994. Special issue on Higher-Order Statistics.
- [Com95] P. Comon. Quelques développements récents en Traitement du Signal. Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Nice, UFR Sciences, sep 18 1995.
- [CS93] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac. An efficient technique for blind separation of complex sources. In *Proc. HOS*, 1993.
- [CWR91] W. Chen, K.M. Wong, and J.P. Reilly. Detection of the number of signals : a predicted eigen-threshold approach. *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39 :1088–1089, 1991.
- [DDC99] Y. Deville, J. Damour, and N. Charkani. Improved multi-tag radio-frequency identification systems based on new source separation neural networks. In *Proc. ICA*, pages 449–454, Aussois, France, 1999.
- [Dér92] S. Dérou. *Contribution À L'étude Des Vibrations Des Machines Synchrones*. PhD thesis, INPG, oct 1992.
- [DGA98] J.M. Danthez, C. Giroussens, and R. Aquilina. The autocohérent spectrum : A useful spectral estimator for vibration analysis of rotating machinery. accurate estimation and cancellation of pure tones. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 12 :753–768, 1998.

- [Don81] D. Donoho. On minimum entropy deconvolution. *Applied time-series analysis II*, pages 565–609, 1981.
- [FK99] M. Feng and K. Kammeyer. Application of source separation algorithms for mobile communication environment. In *Proc. ICA*, page 431, Aussois, France, 1999.
- [FSL98] P. Fabry, C. Servière, and J.-L. Lacoume. Improving signal subspace estimation and source number detection in the context of spatially correlated noises. In *Proc. EUSIPCO*, pages 1809–1812, Rhodes, 1998.
- [Gaé91] M. Gaéta. *Les Statistiques D'ordre Supérieur Appliquées À la Séparation de Sources*. PhD thesis, INPG, Grenoble, jul 1991.
- [GC90] J.F Guerre-Chaley. *Etudes de différentes structures soustracteurs de bruit adaptatifs multiréférences*. PhD thesis, INPGrenoble, Grenoble, 1990.
- [GCD99] G. Gelle, M. Colas, and G. Delaunay. Separation of convolutive mixtures of harmonic signals with a temporal approach. application to rotating monitoring. In *ICA*, pages 109–114, Aussois, France, 1999.
- [GL83] G.H. Golub and F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1983.
- [GL90] M. Gaéta and J.-L. Lacoume. Source separation without a priori knowledge : The maximum likelihood solution. In *Proc. EUSIPCO*, pages 621–624, Barcelona, Spain, 1990.
- [Hyv99] A. Hyvarinen. Gaussian moments for noisy independent component analysis. *IEEE Signal processing letters*, vol. 6(6) :145–147, 1999.
- [JGC89] C. Serviere et A. Silvent J.F. Guerre-Chaley, D. Baudois. Réduction de bruit en présence de références multiples : Traitements parallèle et cascade. In *gretsi*, pages 573–576, Juan les Pins, France, 1989.
- [JMW⁺99] T. Jung, S. Makeig, M. Westerfield, J. Townsend, E. Courchesne, and T. Sejnowski. Independent component analysis of single-trial event-related potentials. In *Proc. ICA*, pages 173–178, Aussois, France, 1999.
- [Jut87] C. Jutten. *Calcul neuromimétique et traitement du signal. Analyse en Composantes Principales*. PhD thesis, INPG, Grenoble, 1987.
- [Jut96] C. Jutten. Une approche pour la séparation de sources dans les mélanges convolutifs. In *Ecole Des Techniques Avancées En Signal Image Parole*, pages 245–253, Grenoble, France, sept 1996.
- [Kol94] V.L. Koliadin. Determination of the signal-subspace dimension : A nonparametric approach based on the eigenvectors analysis. In *Proc. EUSIPCO*, pages 268–271, Edinburgh, September 1994.
- [LAC97] J.L. Lacoume, P.O. Amblard, and P. Comon. *Statistiques D'ordre Supérieur Pour Le Traitement Du Signal*. Masson, Paris, 1997.

- [Lac99] J.L. Lacoume. A survey of source separation. In *Proc. ICA*, pages 1–12, Aussois, France, 1999.
- [Mar98] S. Marcos. *Les Méthodes À Haute Résolution*. Hermes, Paris, 1998.
- [MBE97] M.Gaeta, F. Briolle, and Ph. Esparcieux. Blind separation of sources applied to convolutive mixtures in shallow water. In *IEEE Signal Processing Workshop on Higher Order Statistics*, pages 340–343, Banff, Canada, July 21-23,1997.
- [Mer76] H. Mermoz. Imagerie, corrélation et modeles. *Annales des Télécommunications*, vol. 31(1-2) :17–36, 1976.
- [MM96] E. Moreau and O. Macchi. High order contrasts for self-adaptive source separation. *Int. J. Adaptive Contr. Signal Processing*, vol. 10(1) :19–46, 1996.
- [Mor95] E. Moreau. *Apprentissage et adaptativité, séparation auto-adaptative de sources indépendantes par un réseau de neurones*. PhD thesis, Paris-sud, Orsay, fev 1995.
- [NTJ95] H.-L. Nguyen-Thi and C. Jutten. Blind source separation for convolutive mixtures. *Elsevier Signal Processing*, vol. 45(2) :209–299, 1995.
- [PA99] A. Puga and A. Alves. An experiment on comparing PCA and ICA in classical transform image coding. In *Proc. ICA*, pages 105–108, Aussois, France, 1999.
- [PH96] J.Grouffaud P.Larzabal and H.Clergeot. Some properties of ordered eigenvalues of a wishart matrix : application in detection test and model order selection. In *Proc. ICASSP*, pages 2463–2466, Atlanta, May 1996.
- [Pic93] B. Picinbono. *Random signals and systems*. Prentice Hall, 1993.
- [Pic94] B. Picinbono. On circularity. *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42(12) :3473, dec 1994.
- [PIJI+98] A. Paraschiv-Ionescu, C. Jutten, A. Ionescu, A. Chovet, and A. Ruscu. High performance magnetic field smart sensor arrays with source separation. In *Proc. MSM*, Santa Clara, USA, 1998.
- [RJ99] T. Ristaniemi and J. Joutsensalo. On the performance of blind source separation in CDMA downlink. In *ICA*, pages 437–442, Aussois, France, 1999.
- [RL89] P. Ruiz and J.L. Lacoume. Extraction of independent sources from correlated input, a solution based on cumulants. In *Proc.hos*, Vail, USA, 1989.
- [SC93] A. Souloumiac and J.F. Cardoso. Performances en séparation de sources. In *Proc. GRETSI*, pages 321–324, Juan les Pins, 1993.
- [SC97] P. Stoica and M. Cedervall. Detection tests for array processing in unknown correlated noise fields. *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45(9) :2351–2362, sep 1997.
- [Sch78] G. Schwarz. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, vol. 6(No. 2) :461–464, 1978.

- [SCS95] P. Stoica, M. Cedervall, and T. Soderstrom. Adaptive instrumental variable method for robust direction-of-arrival estimation. *Proc. Inst. Elec. Eng., Radar, Sonar, Navigation*, vol. 142 :45–53, 1995.
- [Sim99] C. Simon. *Séparation aveugle de Sources en mélange convolutif*. PhD thesis, Université de marne la vallée, nov 1999.
- [Sou93] A. Souloumiac. *Utilisation Des Statistiques D'ordre Supérieur Pour Le Filtrage et la Séparation de Sources En Traitement D'antenne*. PhD thesis, ENST, Paris, feb 1993.
- [SVO94] P. Stoica, M. Viberg, and B. Ottersten. Instrumental variable approach to array processing in spatially correlated noise fields. *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42 :121–133, 1994.
- [TJ99] A. Taleb and C. Jutten. Source separation in post-nonlinear mixtures. *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 47(10) :2807–2820, oct 1999.
- [Tor99] K. Torkkola. Blind separation for audio signals. In *ICA*, pages 239–244, Aussois, France, 1999.
- [VSJO99] R. Vigario, J. Sarela, V. Jousmaki, and E. Oja. Independant component analysis in decomposition of auditory and somatosensory evoked fields. In *Proc. ICA*, pages 167–172, Aussois, France, 1999.
- [VSO95] M. Viberg, P. Stoica, and B. Ottersten. Array processing in correlated noise-fields using instrumental variables and subspace fitting. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 43 :1187–1199, 1995.
- [VVVC99] R. Vetter, J.M. Vesin, N. Virag, and P. Celka. Blind source separation in highly noisy environments. In *ICA*, pages 491–496, Aussois, France, 1999.
- [WB99] A. Westner and V. Bove. Blind separation of real world audio signals using overdetermined mixtures. In *ICA*, page 251, Aussois, France, 1999.
- [WGC⁺75] Widrow, Glover, Mc Cool, Kaunitz, Williams, Hear Zeidler, Dong, and Goodlin. Adaptive noise cancelling : principles and applications. *Proc. IEEE*, vol. 63 :1692, dec 1975.
- [Wie49] Wiener. *Extrapolation, Interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications*. Wiley, 1949.
- [WP99] H. Wu and J. Principe. Simultaneous diagonalization in the frequency domain (sdif) for source separation. In *ICA*, pages 245–250, Aussois, France, 1999.
- [WT98] Y. Wu and K.W. Tam. On determination of the number of signals in spatially correlated noise. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 46(11) :3023–3029, nov 1998.
- [WW94] Q. Wu and K.M. Wong. UN-MUSIC and UN-CLE : An application of generalized correlation analysis to the estimation of the direction of arrival of signals

- in unknown correlated noise. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 42(2) :2331–2343, sept 1994.
- [YW94] D. Yellin and E. Weinstein. Criteria for multichannel signal separation. *IEEE Trans. on signal processing*, vol. 42(8) :2158–2168, aug 1994.
- [ZL99] C. Ziegans and E. Lang. Independent component extraction of natural images based on fourth-order cumulants. In *Proc. ICA*, pages 115–120, Aussois, France, 1999.